Physik der Materie II

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

28. Juni 2008

Aufgabe 01

Der Netzebenenabstand der Ebenenschar (hkl) ist für ein Gitter mit den reziproken Gittervektoren $\vec{b}_i, \ i = 1, 2, 3$ gegeben durch

$$d_{hkl} = \frac{2\pi}{\left|h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3\right|}$$

Speziell für das bbc Gitter sind $\vec{b}_i = \frac{2\pi}{a}\vec{e}_i$, so dass sich ergibt

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Beginnen mit der Braggschen Reflexionsbedingung

$$2d_{hkl} \sin\vartheta \overset{!}{=} \lambda$$

und erhalten die Bedingung

$$h^2 + k^2 + l^2 = \left[\frac{2a \sin\vartheta}{\lambda}\right]^2 \approx 10$$

Die einzigen, die obere Bedingung erfüllenden, Scharen sind

$$(130),\ (310),\ (103),\ (301),\ (013),\ (031)$$

Die de Broglie Wellenlänge λ_e eines Elektrons ist gegeben durch $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}$ wobei $E = eU$ seine kinetische Energie, m_e sein Masse und U die Beschleunigungsspannung ist, das heißt

$$U = \frac{h^2}{2m_e e\lambda^2} \approx 298 \text{ V}$$

Aufgabe 02

a) Analog zu vorhin beginnen wir auch hier mit der Braggschen Reflexionsbedingung

$$2d_{hkl} \sin\vartheta \overset{!}{=} \lambda \ , \ d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

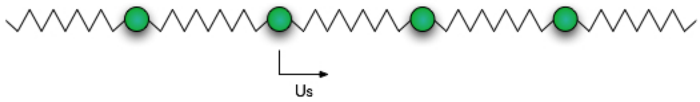
und erhalten

$$a = \frac{\lambda}{2\sin\vartheta} \cdot \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \approx 0.57 \text{ nm}$$

b) Der Netzebenenabstand der Schar (220) ergibt sich demnach als

$$d_{220} = \frac{a}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2}} \approx 0.2 \text{ nm}$$

Aufgabe 03



a) Sofort abzulesen ist

$$M\ddot{u}_s = f_1(u_{s+1}-u_s)+f_1(u_{s-1}-u_s)+f_2(u_{s+2}-u_s)+f_2(u_{s-2}-u_s) = f_1\left(u_{s+1}+u_{s-1}-2u_s\right)+f_2\left(u_{s+2}+u_{s-2}-2u_s\right)$$

b) Machen den Ansatz

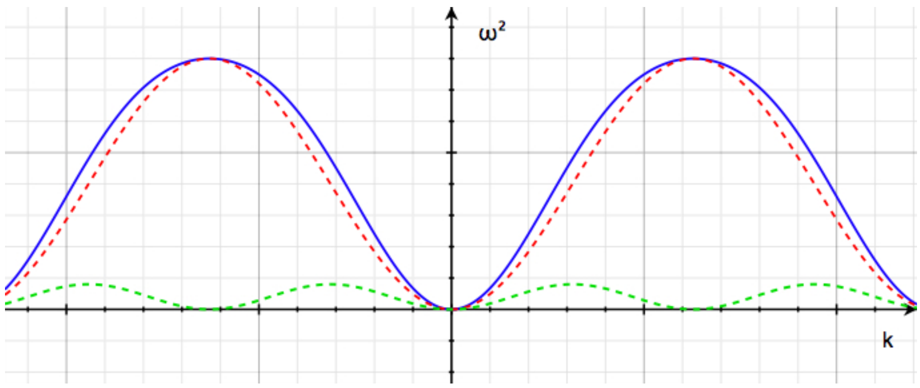
$$u_{s+n} = Ae^{i(nka-\omega t)}$$

und gehen damit in die Differentialgleichung ein:

$$M\ddot{u}_s = -\omega^2 M u_s \overset{!}{=} f_1 \underbrace{\left(e^{ika}+e^{-ika}-2\right)}_{2(\cos ka-1)} \cdot u_s + f_2 \underbrace{\left(e^{i2ka}+e^{-i2ka}-2\right)}_{2(\cos 2ka-1)} \cdot u_s$$

$$\rightarrow\ \omega^2 = \frac{2f_1}{M}(1-\cos ka) + \frac{2f_2}{M}(1-\cos 2ka) = \frac{4}{M}\left[f_1 \sin^2\frac{ka}{2} + f_2 \sin^2 ka\right]$$

Zu erkennen ist der, im Fall der einfachen linearen Kette nicht-existenten, Wechselwirkung mit dem übernächsten Nachbar, ausgedrückt durch den 2. Summanden in der oberen Dispersionsrelation. Im folgenden ist der Zusammenhang $\omega^2 = \omega^2(k)$ qualitativ $(M = a = 1)$ für $f_1 = 10 \cdot f_2$ illustriert:



Dabei entsprechen die gestrichelten Kurven jeweils den Einflüssen der 1. bzw. 2. Nachbarn-Wechselwirkung.

Aufgabe 04

a) Die Energie eines einzelnen Phonons der Frequenz ν ist gegeben durch $E_p = h\nu$, so dass sich durch die Forderung $\langle n\rangle \overset{!}{=} 1$ ergibt

$$1 \overset{!}{=} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1} \ \rightarrow\ T = \frac{h\nu}{k_B T \ln 2}$$

b) Die Phononenzahl beträgt wie schon in der Aufgabenstellung erwähnt im Mittel

$$\langle n\rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{2\pi k_B T}}-1}$$

Die Energie des harmonischen Oszillators (Mode) ist gegeben durch

$$E = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

so dass sich die Energie der Mode ergibt als

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{2\pi k_B T}} - 1} \right)$$

Speziell:

$$T = 50 \text{ K} : \langle n \rangle \approx 1.1 \times 10^4 \ , \ \langle E \rangle \approx 7 \times 10^{-22} \text{ J}$$

$$T = 300 \text{ K} : \langle n \rangle \approx 6.5 \times 10^4 \ , \ \langle E \rangle \approx 4 \times 10^{-21} \text{ J}$$