Physik der Materie I
FSU Jena - WS 07/08
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

23. Januar 2008

Thema: Röntgenstrahlung, Streuung am Kern, Bindungsenergie des Kerns

Aufgabe 15

Die auf der Anode auftreffenden Elektronen können eine maximale Energie $E_0 = U_a \cdot e$ haben. Bei der plötzlichen Beschleunigung an der Anode, emittieren diese Elektronen elektromagnetische Strahlung, deren Photonen auch die maximale Energie $E_0 = h\nu$ bzw. die minimale Wellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E_0} = \frac{hc}{U_a e} \approx 3.57 \cdot 10^{-11}\ m$$

haben können.

Aufgabe 16

Die Energie E_n eines Elektrons im n-ten Energieniveau ist gegeben nach Moseley (bzw. Bohr) durch:

$$E_n = -\underbrace{\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}}_{hR_H} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (Z - \sigma_n)^2$$

wobei $R_H \approx 3.289\ Hz$ die Rydberg-Frequenz und σ_n die Abschirmkonstante für die entsprechende Schale ist. Umgerechnet also

$$\sigma_n = Z - n \cdot \sqrt{\frac{-E_n}{hR_H}}$$

In unserem Fall sind $Z = 74,\ n = 1,\ E_1 = -69.5\ keV$. Somit ist

$$\sigma_1 \approx 2.52$$

was auf einen erheblichen Einfluss der restlichen Elektronen auf ein K-Elektron deutet!

Aufgabe 17

Wir definieren

$$\alpha(\gamma) := \frac{q(\gamma)}{\hbar} = \frac{2mv}{\hbar} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

und setzen o.B.d.A $\vec{v} = v\vec{e}_z$. Wir beginnen mit der Definition des Formfaktors und schreiben unter Verwendung von Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$F(\gamma) = \frac{1}{Z} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, dV = \frac{1}{Z} \cdot \int\limits_{\|\vec{r}\|\leq R} \rho_0 e^{i2m\sin(\vartheta/2)\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, dV = \frac{\rho_0}{Z} \cdot \int\limits_{\|\vec{r}\|\leq R} e^{i\alpha r\cos\vartheta}\, dV$$

$$= \frac{2\pi\rho_0}{Z} \cdot \int_0^R \int_0^\pi e^{i\alpha r\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr = \frac{2\pi\rho_0}{Z} \cdot \int_0^R \frac{r}{i\alpha} \cdot \left[-e^{i\alpha r\cos\vartheta}\right]_0^\pi\, dr = \frac{4\pi\rho_0}{Z\alpha} \cdot \int_0^R r\sin(\alpha r)\, dr$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{Z\alpha^3} \cdot [\sin(\alpha R) - R\alpha\cos(\alpha R)] = \frac{4\pi\rho_0\hbar^3}{Zq^3(\gamma)} \cdot \left[\sin\left(\frac{q(\gamma)R}{\hbar}\right) - \frac{q(\gamma)R}{\hbar} \cdot \cos\left(\frac{q(\gamma)R}{\hbar}\right)\right]$$

Wir normieren ρ_0 so dass

$$Q = \int\limits_{\|\vec{r}\|\leq R} \rho_0\, dV = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho_0$$

der Ladung $Q = Ze$ des Kerns entspricht, also

$$\rho_0 = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

und erhalten so schließlich den Formfaktor $F(\gamma)$ als

$$\boxed{F(\gamma) = \frac{3\rho_0 e\hbar^3}{R^3 q^3(\gamma)} \cdot \left[\sin\left(\frac{q(\gamma)R}{\hbar}\right) - \frac{q(\gamma)R}{\hbar} \cdot \cos\left(\frac{q(\gamma)R}{\hbar}\right)\right]}$$