Physik der Materie I
FSU Jena - WS 07/08
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Dezember 2007

Thema: Bohrsches Atommodell, Spin-Bahn-Wechselwirkung, magnetisches Dipolmoment, Emission und Absorption von elektromagnetischen Wellen

Aufgabe 11

Nach dem Bohrschen Atommodell ist der Bohrsche Bahnradius der Ordnung n gegeben durch

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e Z e^2}$$

wobei Z die Ordnungszahl des Atoms sei. In unserem Fall ist $Z = 1$. Die Drehimpulsquantenzahl l kann für $n = 2$ die Werte $0, 1$ annehmen. Dabei bleibt nach dem Bohrschen Atommodell der Radius r_n gleich. Das Potential $V(\vec{r})$ ist gegeben durch das Coulomb-Potential

$$V(\vec{r}) = V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

und wir erhalten mit

$$\Omega_{jls} := (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

die Spin-Bahn Wechselwirkungsenergie E_{ls} für gegebene l, s, j

$$E_{ls} = \left\langle \frac{\hbar^2}{4m_e^2 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right\rangle_r \cdot \Omega_{jls} \overset{r:const}{=} \frac{\hbar^2 e^2 Z}{4m_e^2 c^2 4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \Omega_{jls} = \frac{\hbar^2 e^2 Z}{16 m_e^2 c^2 \pi \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\pi m_e Z e^2}{h^2 \varepsilon_0 n^2} \right)^3 \cdot \Omega_{jls} = \frac{e^8 Z^4 m_e}{64 c^2 h^4 \varepsilon_0^4 n^6} \cdot \Omega_{jls}$$

Wegen $j = l \pm s$ und $l = 1,\ s = \frac{1}{2}$ gilt $j \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ und die erlaubten Werte für Ω_{jls} sind demnach

$$\Omega_{jls} \in \{-2,\ 1\}$$

Somit ergeben sich die beiden Energiewerte als

$$E_1 \approx -1.12 \cdot 10^{-5}\ eV \quad , \quad E_2 \approx 5.58 \cdot 10^{-6}\ eV$$

Aufgabe 12

Aufgrund des magnetischen Moments $\vec{\mu}$ des Elektrons wirkt auf das Atom im allgemeinen ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Das $\vec{\mu}$ ist zwar nicht fest, doch gleichverteilt auf einer *Kreislinie* um die z Achse des Atoms herum. Die beiden Komponenten μ_x und μ_y heben sich also im zeitlichen Mittel aus, und es spielt nur noch μ_z eine wesentliche Rolle. Aufgrund des Drehmoments nimmt das Elektron einen Gleichgewichtszustand an, bei dem $\mu_z \vec{e}_z \parallel \vec{B}$ ist. Dann ist bzgl. des Koordinatensystems des Atoms $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Die aufgrund der Kopplung mit dem $\vec{B}$-Feld existierende Energie E des Elektrons ergibt sich demnach als

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B = -\left(\frac{e m_l \hbar}{2m_e} \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \right) B$$

Da $l = 0$ ist muss auch $m_l = 0$ sein, und die Energie ergibt sich demnach als

$$E = \pm \frac{e\hbar B}{2m_e} \approx \pm 3.48 \cdot 10^{-5}\ eV$$

Aufgabe 13

Die Energie E die das Elektron aufgrund seiner Kopplung mit dem Magnetfeld $\vec{B}$ hat ist gegeben durch

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\left(\frac{e}{em_e}\vec{l} + \frac{e}{m_e}\vec{s} \right) \cdot \vec{B} = -\frac{e}{m_e} \cdot \vec{s} \cdot \vec{B}$$

Das magnetische Feld sei o.B.d.A parallel zu $\vec{e}_z$ gerichtet. Dann ergibt sich

$$E = -\frac{e}{m_e} \cdot s_z B = g \cdot \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot B,\ g \in \{\pm 1\}$$

Dann ergibt sich die Kraft $\vec{F}$ als

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E = -\frac{eg\hbar}{2m_e} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \ \rightarrow\ F = \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot \frac{dB}{dz} \approx 7.89 \cdot 10^{-21}\ N$$

Aufgabe 14

Allgemein ist die induzierte Absorbionsrate gegeben durch

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_a = -\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_a = B_{12}N_1\ ,\ B_{12} : const$$

Analog ist die induzierte Emmissionsrate gegeben durch

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_e = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_e = B_{21}N_2\ ,\ B_{21} : const$$

und die spontane Emmissionsrate durch

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_s = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_s = A_{21}N_2\ ,\ A_{21} =: A : const$$

Für nicht entartete Systeme gilt $B_{12} = B_{21} =: B$. Insgesamt ergibt sich also

$$-\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_e + \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_s + \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_a = BN_2 + AN_2 - BN_1$$

Im Stationären Zustand ist $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$, also

$$N_2(B + A) - BN_1 = 0\ \rightarrow\ \frac{\Delta N}{N_t} = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = \frac{A}{2B + A}$$

Im Grenzfall $B << A$ ergibt sich

$$\frac{\Delta N}{N_t} \approx 1$$

und für $B >> A$ analog

$$\frac{\Delta N}{N_t} \approx \frac{A}{2B} \approx 0$$