Physik der Materie I
FSU Jena - WS 07/08
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

6. Dezember 2007

Thema: Schrödingergleichung, Wellenfunktion, Bohrsches Atommodell

Aufgabe 08

a) Die Zeitfreie (also homogene) Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + U\varphi = E\varphi$$

seie lösbar durch

$$\varphi(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$$

Wir gehen damit in die DGL ein und erhalten

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + U\varphi = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\left(A\sin\alpha x + B\cos\alpha x\right) + U\varphi = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\varphi + U\varphi = E\cdot\varphi$$

Durch die Bedingung $|\varphi| < \infty$ erhält man unter Kenntnis dass $U(0) = U(a) = \infty$ die Bedingung $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, also

$$0 = \varphi(0) = B,\ 0 = \varphi(a) = A\sin\alpha a + B\cos\alpha a \ \rightarrow\ A\sin\alpha a = 0$$

Da jedoch die Lösung $\varphi \equiv 0$ keine Physikalische Bedeutung hätte, muss

$$\sin\alpha a = 0 \ \rightarrow\ \alpha = \frac{n\pi}{a} =: \alpha_n,\ n\in\mathbb{N}$$

$$\rightarrow\ \varphi_n(x) = A_n\sin(\alpha_n x)$$

Innerhalb des Potentialtopfes $x \in (0,a)$ ist $U = 0$, also muss allgemein gelten

$$E = \frac{\hbar^2\alpha_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\cdot n^2$$

Diese diskreten erlaubten Energiewerte sind genau die Energieeigenwerte. Durch die Normierung

$$\int_0^a \varphi_n^2(x)\ dx = \int_0^a A_n^2\sin^2\alpha_n x\ dx = A_n^2\frac{a}{2} \stackrel{!}{=} 1$$

erhält man schließlich

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}$$

b) Für ein Teilchen der Masse m_i wäre der erste Energiewert E_i

$$E_i = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_i a^2}$$

Aufgabe 09

Betrachten ein mit der Frequenz ν zwischen den beiden Potentialbarrieren (Abstand a) oszillierendes Teilchen der Masse m. Seine Geschwindigkeit v bzw. Energie E beträgt

$$v = 2a\nu \;\rightarrow\; E = \frac{mv^2}{2} = 2ma^2\nu^2 \;\rightarrow\; \nu = \sqrt{\frac{E}{2ma^2}}$$

Wir gehen damit in die Quantisierungsbedingung ein und erhalten

$$h(n+n_0) = \sqrt{2ma^2} \cdot \int \frac{dE}{\sqrt{E}} = 2\sqrt{2ma^2 E}$$

$$\rightarrow\; E = \frac{h^2(n+n_0)^2}{8ma^2} = \frac{\hbar^2\pi^2(n+n_0)^2}{2ma^2}$$

Vergleich mit Aufgabe (08) liefert $n_0 = 0$. Der Impuls p ist gegeben durch

$$p = \sqrt{2mE} = \frac{\hbar\pi n}{a}$$

Demnach ist die *Orts-Impulsunschärfe*

$$p \cdot \frac{a}{2} = \frac{\hbar\pi n}{2}$$

und somit das $\pi \cdot n$ - fache des Wertes das von der Heisenbergschen Unschärferelation als minimaler Wert angegeben wird.

Aufgabe 10

Sei m_k die Masse des Kerns und m_m die Masse des Myons, und $\vec{r}_k,\ \vec{r}_m$ die entsprechenden Ortsvektoren. Sei $\vec{r}_{km} := \vec{r}_m - \vec{r}_k$ der Atomradius und $\vec{e}_\rho := \frac{\vec{r}_{km}}{r_{km}}$. Auf den Massenschwerpunkt $\vec{r}_c$ der beiden Teilchen wirke keine äußere Kraft, d.h $\ddot{\vec{r}}_c = 0$. Dann sei o.B.d.A $\dot{\vec{r}}_c = 0$. Ist $\vec{F}_{km} = F_{km} \cdot \vec{e}_\rho$ die vom Kern auf das Myon wirkende Kraft, dann gilt

$$\mu\ddot{\vec{r}}_{km} = \vec{F}_{km} = F_{km}\vec{e}_\rho$$

wobei μ die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_k m_m}{m_k + m_m}$$

ist. Die Kraft $\vec{F}_{km}$ ist genau die Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{km} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{km}^2} \cdot \vec{e}_\rho$$

Diese muss gleich der *reduzierten* Zentripedalkraft

$$\vec{F}_z = -\frac{\mu}{r_{km}} \cdot v^2 \cdot \vec{e}_\rho$$

sein, wobei $v = \left|\dot{\vec{r}}_{km}\right|$.
Bemerkung: Wir nehmen eine konstante Kreisbahn an.
Demnach gilt für v und r_{km}:

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu r_{km}} \tag{1}$$

Der Umfang $2\pi r_{km}$ muss einem ganzzahligen Vielfachem $n\lambda, n \in \mathbb{N}$ der dem Teilchen μ entsprechende Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$ entsprechenden. Dabei ist

$$p = \mu v$$

der *reduzierte* Impuls, und somit

$$v = \frac{nh}{2\pi\mu r_{km}},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Eingesetzt in Gl. (1) ergibt

$$\boxed{r_{km} = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0 (m_m + m_k)}{\pi m_m m_k Z e^2},\ n \in \mathbb{N}}$$

Für $m_k = 140\ u \approx 2.32 \cdot 10^{-25}\ Kg,\ Z = 60,\ n = 1,\ m_m \approx 1.88 \cdot 10^{-28}\ Kg$ ergibt sich

$$r_{km} \approx 4.28 \cdot 10^{-15}\ m$$

Der Kernradius ist näherungsweise gegeben durch

$$R_k \approx R_0 \sqrt[3]{A} \approx 6.75 \cdot 10^{-15}\ m > r_{km}$$

Das Myon Kreist also ziemlich nahe am Kern herum bzw. besitzt im Kern eine ziemlich hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit, und befindet sich unterhalb jeglicher Elektronenhüllen! Bei einer *Gleichverteilung* der Elektronenladung auf diesen Hüllen existiert im *inneren* dieser Hüllen kein von den Elektronen erzeugtes Feld. Demnach kann das Myon *ungestört* mit dem Kern wechselwirken!