Physik der Materie
FSU Jena - WS 2006/2007
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

1. Februar 2008

Aufgabe 01

Wir beginnen mit den allgemeinen Beziehungen für ein nicht relativistisches Teilchen

$$E = \frac{mv^2}{2} = \hbar\omega \quad , \quad p = mv = \hbar k$$

und schreiben

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Die Phasengeschwindigkeit v_p ergibt sich als

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ergibt sich ferner als

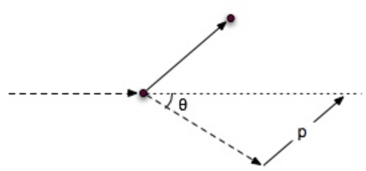
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

Aufgabe 02

Betrachten das Inertialsystem in dem das Elektron (Ruhemasse m_0) ruht, und das Photon (Energie E_p^0) die Geschwindigkeit $\vec{v}_p^{\,0}$ hat. Nach dem Stoß wird das Photon gestreut, wobei ein Teil seiner Energie auf das Elektron übertragen wird. Wir setzen o.B.d.A $\vec{v}_p^{\,0} = v_p^0 \cdot \vec{e}_x$ schreiben die Energie und Impulsbilanz auf:

$$\text{Energieerhaltung: } m_0c^2 + E_p^0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} + E_p^1 \quad , \ \vec{p}: \text{Elektronimpuls nach dem Stoß}$$

$$\text{Impulserhaltung:} p^2 = \frac{{E_p^0}^2}{c^2} + \frac{{E_p^1}^2}{c^2} - \frac{2E_p^1E_p^0}{c^2}\cos\vartheta \ , \ \frac{E_p^i}{c}: \text{Impuls des Photons (Siehe Skizze)}$$



Ineinander eingesetzt erhält man

$$\left(m_0c^2 + E_p^0 - E_p^1\right)^2 = m_0^2c^4 + {E_p^0}^2 + {E_p^1}^2 + 2m_0c^2E_p^0 - 2m_0c^2E_p^1 - 2E_p^0E_p^1 = {E_p^0}^2 + {E_p^1}^2 - 2E_p^1E_p^0\cos\vartheta + m_0^2c^4$$

$$\rightarrow \ E_p^0E_p^1(1-\cos\vartheta) = m_0c^2\left(E_p^0 - E_p^1\right)$$

Im Falle einer vollständigen Energieübergabe, ist $E_p^1 = 0$ und man erhält

$$m_0 c^2 E_p^0 = 0$$

was einen Widerspruch darstellt!

Aufgabe 03

Wir beginnen mit der Schrödinger-Gleichung im stationären Fall

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) = E(\vec{r})\varphi(\vec{r})$$

und lösen sie für den eindimensionalen Fall für

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : x < 0 \\ 0 & : x \in [0, a] \\ V_0 & : x > a \end{cases}$$

in den 2 Teilgebieten ($x > 0$):

$$\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{a}] : -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2 \varphi''}{2m} = E\varphi \rightsquigarrow \varphi_1(x) = A_1 e^{i\omega x} + B_1 e^{-i\omega x} \;,\; \omega := \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{a} : -\frac{\hbar^2 \varphi''}{2m} = (E - V_0)\varphi \rightsquigarrow \varphi_2(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x} \;,\; \alpha := \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Durch die Bedingung

$$\lim_{x \to \infty} \varphi_2(x) = 0$$

ergibt sich $A_2 = 0$ und man erhält die allgemeine Lösung für $x > a$ als

$$\varphi(x) = Be^{-\alpha x}$$

Aufgabe 04

Das magnetische Dipolmoment des Elektrons ist gegeben durch

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m_e} \cdot \vec{s}$$

und ist im Koordinatensystem des Atoms fest gebunden. Das $\vec{B}$-Feld sein o.B.d.A in z-Richtung orientiert. Durch Einführung des Atoms in das $\vec{B}$-Feld wird das Atom so gedreht, dass die z-Koordinate von $\vec{\mu}$ parallel zum Feld liegt. So ergibt sich die Wechselwirkungsenergie allgemein als

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B = \frac{e}{m_e} s_z B = \frac{e}{m_e} m_s \hbar B = \pm \frac{e\hbar B}{2m_e}$$

wobei $m_s = \pm\frac{1}{2}$ sein kann. Der Winkel ϑ zwischen dem Spin $\vec{s}$ und dem Magnetfeld (also der z-Achse) ergibt sich als

$$\cos(\vartheta) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{e}_z}{|\vec{s}|} = \frac{s_z}{|\vec{s}|} = \frac{m_s \hbar}{\sqrt{s(s+1)}\hbar} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 05

Die gesamte Energie eines Kerns (A,Z) ist allgemein gegeben durch

$$E(A,Z) = Zm_hc^2 + (A-Z)m_nc^2 - E_B(A,Z)$$

wobei m_h, m_n jeweils die Masse eines Freien H-Atoms und Neutrons sind. Durch die Verschmelzung von zwei (A,Z) Kernen entsteht ein neuer Kern (2A,2Z) mit der Energie

$$E(2A,2Z) = 2Zm_hc^2 + 2(A-Z)m_nc^2 - E_B(2A,2Z)$$

Die freigesetzte Energie ΔE ergibt sich so als

$$\Delta E = 2E(A,Z) - E(2A,2Z) = E_B(2A,2Z) - 2E_B(A,Z)$$

$$= \left[2a_vA - a_s(2A)^{2/3} - a_c\frac{4Z^2}{(2A)^{1/3}} - a_A\frac{2(Z-A/2)^2}{A} + a_p\frac{\delta}{(2A)^{1/2}}\right] - 2\left[a_vA - a_sA^{2/3} - a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A\frac{(Z-A/2)^2}{A} + a_p\frac{\delta}{A^{1/2}}\right]$$

$$= a_sA^{2/3}\left(2-2^{2/3}\right) + a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(2-2^{5/3}\right) + \frac{a_p}{\sqrt{2A}}\left(\delta_{(2A,2Z)} - 2^{3/2}\delta_{(A,Z)}\right)$$

Unter der Annahme dass es sich ursprünglich um einen stabilen Kern handelte, also

$$Z = \frac{A}{2} \;\wedge\; \delta(A,Z) = 0$$

galt, ergibt sich wegen $\delta_{(2A,2Z)} = 1$ (gg Kern)

$$\Delta E = a_sA^{2/3}\left(2-2^{2/3}\right) + \frac{a_c}{4}A^{5/3}\left(2-2^{5/3}\right) + \frac{a_p}{\sqrt{2A}}$$

Damit $\Delta E > 0$ ist, muss also gelten

$$a_sA^{7/6}\left(2-2^{2/3}\right) + \frac{a_c}{4}A^{13/6}\left(2-2^{5/3}\right) + \frac{a_p}{\sqrt{2}} \geq 0$$

Aufgabe 06

Die Frequenz ν eines durch den Übergang eines Elektrons zwischen den Energieniveaus $n+1$ und n entstehenden Photons, ist gegeben durch

$$h\nu = E_{n+1} - E_n$$

oder anders geschrieben

$$\nu = \frac{1}{h}\cdot\frac{E_{n+1}-E_n}{(n+1)-n}$$

Für $n\to\infty$ verschwindet die Diskretisierung der Energieniveaus und die quantenmechanische Frequenz ν sollte in die Klassische ν_k übergehen:

$$\lim_{n\to\infty}\nu = \frac{1}{h}\cdot\frac{dE}{dn} \overset{!}{=} \nu_k$$

Somit erhält man

$$\int\frac{dE}{\nu_k(E)} = h\int dn = h(n+\alpha)$$

wobei α eine unbekannte Integrationskonstante ist.