Physik der Materie
FSU Jena - WS 2003/2004
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

5. Februar 2008

Aufgabe 01

a) Wir beginnen mit der Überlegung dass das Elektron (Masse m, Ladung $-e$) in einer festen Bahn mit dem Radius R und der Geschwindigkeit v um den Kern (Ladung Ze) kreist. Dabei hat es die potentielle Energie

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

und die kinetische Energie

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Im Gleichgewicht muss gelten

$$\vec{F}_c + \frac{mv^2}{R}\vec{e}_\rho = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\vec{e}_\rho + \frac{mv^2}{R}\vec{e}_\rho = 0$$

wobei $\vec{F}_c$ die Coulomb-Kraft ist, also

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 mR} \;\rightarrow\; E = T + U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Laut Bohr ist der Bahndrehimpuls des Elektrons $p = mvR$ quantisiert, gemäß

$$p = mvR = n\hbar \;\rightarrow\; v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2R^2} \;\rightarrow\; R_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{Ze^2 m}$$

Somit sind auch die erlaubten Energien quantisiert, gemäß

$$E_n = -\underbrace{\frac{e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}_{E_0\approx 13.6\ eV}\cdot\frac{Z^2}{n^2}$$

b) Um ein Atom vom Zustand n zu Ionisieren (Elektron auf Energie 0 bringen) ist eine Energiezufuhr

$$W = -E_n$$

nötig. Wir setzen ein $Z = 11$ und $n = 100$ und bekommen so

$$W = E_0\cdot\frac{121}{10^4} \approx 0.16\ eV$$

c) Um das Atom zu ionisieren muss die vom Feld auf das Elektron wirkende Kraft $\vec{F} = -e\vec{\mathcal{E}}$ betragsmäßig größer sein als die Coulomb-Kraft des Kernes:

$$e\mathcal{E} \overset{!}{>} \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \;\rightarrow\; \mathcal{E} > \frac{Z^3e^5m^2}{64\pi^3\varepsilon_0^3\hbar^4}\cdot\frac{1}{n^4}$$

Aufgabe 02

a) Wir substituieren $k \to k_0 + s$ und bekommen so

$$\varphi(x,t) = \varphi_0 \int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{-i[\omega(k_0+s)t-(k_0+s)x]} ds = \varphi_0 e^{ik_0 x} \int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{-i[\omega(k_0+s)t-sx]} ds$$

Wegen $\Delta k << k_0$ können wir schreiben

$$\omega(k_0+s) \approx \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \underbrace{\frac{d\omega}{dk}(k_0)}_{a} \cdot s + \underbrace{\frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0)}_{0} \cdot \frac{s^2}{2}$$

und bekommen so

$$\varphi(x,t) \approx \varphi_0 e^{ik_0 x} \int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{-i(\omega_0 t + ast - sx)} ds = \varphi_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{-is(at-x)} ds$$

$$= \varphi_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{i}{(at-x)} \cdot \left[e^{-is(at-x)} \right]_{-\Delta k}^{\Delta k} = \varphi_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{i}{(at-x)} \cdot \left[e^{-i\Delta k(at-x)} - e^{i\Delta k(at-x)} \right]$$

$$= \varphi_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{2}{(at-x)} \cdot \sin\left[\Delta k(at-x)\right]$$

Obere Wellenfunktion entspricht einer Grundwelle (Trägerwelle)

$$\mathcal{W}(x,t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

multipliziert mit der Einhüllenden

$$\mathcal{A}(x,t) = \frac{2\varphi_0}{(at-x)} \cdot \sin\left[\Delta k(at-x)\right]$$

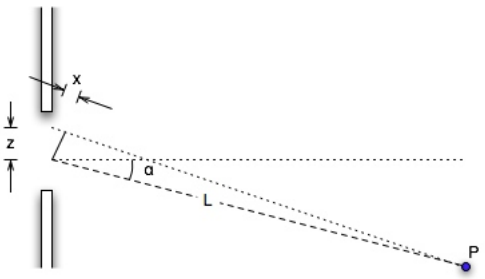
Die Nullstellen außerhalb des Zentrums sind genau dort vorhanden wo

$$\sin\left[\Delta k(at-x)\right] = 0 \ , \ x \neq at$$

ist, also

$$\Delta k(at-x) = \pm\pi \ \to \ x = \mp\frac{\pi}{\Delta k} + \underbrace{at}_{0} = \mp\frac{\pi}{\Delta k}$$

b) Wir betrachten ein Punkt P in der Ferne, im Abstand L vom und Winkel α zum Spalt-Mittelpunkt K.



Das Feld direkt hinter dem Spalt sei o.B.d.A gegeben durch

$$\varphi(0,t) = e^{-i(\omega_0 t + Lk_0)}$$

Der Gangunterschied zwischen einem Strahl ausgehend vom Punkt z und einem Strahl ausgehend von K beträgt in guter Näherung $x = z\sin\alpha$. Somit kann man für das gesamte Feld am Punkt P schreiben

$$\varphi(P,t) \sim \int\limits_{-b/2}^{b/2} e^{-i(\omega_0 t + LK_0 - LK_0 - xk_0)}\, dz = \int\limits_{-b/2}^{b/2} e^{-i(\omega_0 t - z\sin\alpha k_0)}\, dz = e^{-i\omega_0 t} \cdot \int\limits_{-b/2}^{b/2} e^{iz\sin\alpha k_0}\, dz$$

Wir identifizieren hier in Analogie zu vorhin $\frac{b}{2} \to \Delta k$, $k_0 \sin\alpha \to x$ und $z \to s$ und finden so die Minima genau dort wo

$$k_0 \sin\alpha = \pm\frac{2\pi}{b}$$

ist. Mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ erhält man so die ersten Minima in

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{b}$$

Aufgabe 04

Das Elektron befinde sich am Zeitpunkt $t = 0$ o.B.d.A im Ursprung. Wir beginnen mit der Lorenz-Beschleunigung des Elektrons

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{e}{m}\vec{E} - \frac{e}{m}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \frac{eE_0}{m}\vec{e}_z - \frac{eB_0}{m}\dot{y}\vec{e}_x + \frac{eB_0}{m}\dot{x}\vec{e}_y$$

wobei m die Masse des Elektrons sei. Die DGL für die z-Koordinate ist schon entkoppelt, so dass wir gleich aufschreiben können

$$z = \frac{eE_0 t^2}{2m}$$

Für die x und y Koordinate schreiben wir das ganze auf *verschobene* Zylinderkoordinaten um, gemäß

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R(\cos\varphi - 1) \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

wobei $r > 0$ noch zu bestimmen wäre. Diese Darstellung ist hinsichtlich der erwarteten Kreisbahn in der XY-Ebene schon die Hälfte der Lösung. Wir machen nach Betrachtung der Zentrifugalkraft den Ansatz

$$R = \frac{v_0 m}{B_0 e} : const\ ,\ \varphi = \frac{eB_0}{m}t$$

und zeigen durch Einsetzen in die DGL und die Randbedingungen dass dies tatsächlich die Lösung ist:

$$\vec{r}(0) = R\left(\cos 0 - 1\right)\vec{e}_x + R\sin 0\vec{e}_y + \frac{eE_0 t^2}{2m} = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = -R\frac{eB_0}{m}\sin\varphi\vec{e}_x + R\frac{eB_0}{m}\cos\varphi\vec{e}_y + \frac{eE_0 t}{m}\vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}}(0) = -R\frac{eB_0}{m}\sin 0\vec{e}_x + R\frac{eB_0}{m}\cos 0\vec{e}_y = v_0\vec{e}_y$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -R\frac{e^2B_0^2}{m^2}\cos\varphi\vec{e}_x - R\frac{e^2B_0^2}{m^2}\sin\varphi\vec{e}_y + \frac{eE_0}{m}\vec{e}_z = \frac{eE_0}{m}\vec{e}_z - \frac{eB_0}{m}\dot{y}\vec{e}_x + \frac{eB_0}{m}\dot{x}\vec{e}_y \quad \square$$

Die in kinetische Energie umgewandelte Leistung der Felder ist gegeben durch

$$P = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = -e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E} - e\underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)}_{0} = e\dot{z}E_0$$

Somit ergibt sich die übertragene Energie nach einer z-Strecke d als

$$W = \int_0^t P\ dt = eE_0 \int_0^t \dot{z}\ dt = eE_0 z \cong eE_0 d$$

und demnach die gesamte kinetische Energie als

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} + eE_0 d$$

Ginge $v \to c$ so würde auch $m \to \infty$ gehen. Somit würde die Wirkung der beiden Felder gegen 0 streben bzw. $R \to \infty$ und $\dot{\varphi} \to \infty$ gehen. Das Elektron würde quasi eine gerade Bahn in y-Richtung durchlaufen.

Aufgabe 05

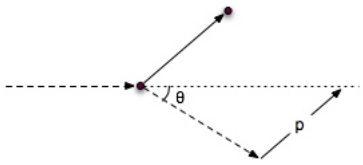
Die Wellenlängenverschiebung $\Delta\lambda \geq 0$ ist für das Photon bei einer Streuung um den Winkel ϑ gegeben durch

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\vartheta)$$

Die so übertragene Energie ergibt sich als

$$\Delta E = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{hc}{\lambda_1} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1 + \Delta\lambda}$$

und steigt wie aus der Formel zu sehen ist mit $\Delta\lambda$. Somit entspricht eine maximale Energieübertragung einer maximalen Wellenlängenänderung $\Delta\lambda$, was genau bei $\vartheta = -\pi$ der Fall ist (*Rückstoß*). Für den auf das Elektron übertragenen Impuls p betrachten wir folgende Skizze



Aus geometrischen Überlegungen erkennt man dass für p gilt

$$p^2 = \frac{h^2}{\lambda_1^2} + \frac{h^2}{\lambda_2^2} - 2\frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2}\cos\vartheta = h^2\left[\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{2}{\lambda_1\lambda_2}(1 - \cos\vartheta)\right] = h^2\left[\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)}\right)^2 + \frac{2\Delta\lambda}{\lambda_c\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)}\right]$$

Somit ist p genau wie bei der Energie maximal bei maximalem $\Delta\lambda$, d.h bei $\vartheta = -\pi$. In dem Fall ist $\Delta\lambda = 2\lambda_c$ und die Energie des Elektrons ergibt sich als

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_1} \cdot \frac{2\lambda_c}{\lambda_1 + 2\lambda_c} \overset{\lambda_1 = \lambda_c}{=} \frac{2m_0c^2}{3}$$

Wegen

$$\Delta E + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

erhält man durch Umstellung für die Geschwindigkeit v des Elektrons in diesem Extremfall

$$v = \frac{4}{5}c$$