Physik der Materie
FSU Jena - WS 2001/2002
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

3. Februar 2008

Aufgabe 01

Die lokale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons ist gegeben durch

$$f(x) = |u(x)|^2$$

Durch die Normierungs-Bedingung

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} \left|C_{11}e^{\chi x} + C_{12}e^{-\chi x}\right|^2\ dx + \int_{0}^{a} |C_2 \sin(kx+\delta)|^2\ dx + \int_{a}^{\infty} \left|C_{31}e^{\chi x} + C_{32}e^{-\chi x}\right|^2\ dx \overset{!}{=} 1$$

mit

$$\chi := \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

erkennt man dass $C_{12} = C_{31} = 0$ sein muss damit W endlich bleibt, also

$$W = \int_{-\infty}^{0} |C_{11}|^2 e^{2\chi x}\ dx + \int_{0}^{a} |C_2|^2 \sin^2(kx+\delta)\ dx + \int_{a}^{\infty} |C_{32}|^2 e^{-2\chi x}\ dx$$

$$= \left(|C_{11}|^2 + |C_{32}|^2\right) \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-2\chi x}\ dx + |C_2|^2 \int_{0}^{a} \sin^2(kx+\delta)\ dx = \frac{\left(|C_{11}|^2 + |C_{32}|^2\right)}{2\chi} + \frac{|C_2|^2}{2}\left[a + \frac{\sin(2\delta) - \sin(2ka+2\delta)}{2k}\right]$$

Geht $V_0 \to \infty$ so geht $\chi \to \infty$. Somit ergibt sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit als

$$W = \frac{|C_2|^2}{2}\left[a + \frac{\sin(2\delta) - \sin(2ka+2\delta)}{2k}\right]$$

Zu erkennen ist dass das Elektron sich nur noch innerhalb des Potentialtopfes befinden kann! Anders gesagt, die Wellenfunktion $u(x)$ verschwindet außerhalb von $[0, a]$, und ferner gilt $C_2 \neq 0$. Wir fordern die Stetigkeit an den Grenzen, so dass $u_2(0) = u_2(a) = 0$ sein muss:

$$C_2 \sin(\delta) = C_2 \sin(ka+\delta) = 0\ \rightarrow\ \delta = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}\ \wedge\ k = \frac{\pi n}{a},\ n \in \mathbb{Z}$$

Wir können o.B.d.A sagen $\delta \in \{0, \pi\}$. Ferner erlaubt es uns die Freiheit in der Konstante C_2 o.B.d.A festzulegen $\delta = 0$, so dass man erhält

$$u_2(x) = C_2 \sin(kx)$$

Wegen $W = 1$ erhält man

$$|C_2| = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

O.B.d.A setzen wir $C_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}$ so dass man schließlich für die Wellenfunktion bzw. die Energieeigenwerte erhält

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \ , \ E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Aufgabe 02

a) Wir beginnen mit der Überlegung dass das Elektron (Masse m, Ladung $-e$) in einer festen Bahn mit dem Radius R und der Geschwindigkeit v um den Kern (Ladung Ze) kreist. Dabei hat es die potentielle Energie

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

und die kinetische Energie

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Im Gleichgewicht muss gelten

$$\vec{F}_c + \frac{mv^2}{R}\vec{e}_\rho = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{mv^2}{R}\vec{e}_\rho = 0$$

wobei $\vec{F}_c$ die Coulomb-Kraft ist, also

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m R} \ \rightarrow \ E = T + U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Laut Bohr ist der Bahndrehimpuls des Elektrons $p = mvR$ quantisiert, gemäß

$$p = mvR = n\hbar \ \rightarrow \ v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2R^2} \ \rightarrow \ R_n = \underbrace{\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m}}_{a_0} \cdot \frac{n^2}{Z}$$

Somit sind auch die erlaubten Energien quantisiert, gemäß

$$E_n = -\underbrace{\frac{e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}_{E_0 \approx 13.6 \ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

b) Wir setzen ein $Z = 11$ und $n = 100$ und bekommen so

$$E_n = -E_0 \cdot \frac{121}{10^4} \approx -0.16 \ eV \ , \ R_n = a_0 \cdot \frac{10^4}{11}$$

wobei a_0 der Bohrsche Radius ist.

c) Um das Atom zu ionisieren muss eine Energie ΔE dem Elektron zugefügt werden, so dass $E_n + \Delta E = 0$ wird, also

$$\Delta E = -E_n \approx 0.16 \ eV$$

Aufgabe 04

Aufgrund ihrer Geschwindigkeit v haben die Myonen die Energie

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wobei m_0 deren Ruhemasse sei. Ein Zeitintervall t im Inertialsystem des ruhenden Zählers entspricht einem Zeitintervall

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = tm_0c^2 \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0c^2} = \frac{tm_0c^2}{E}$$

im Inertialsystem der bewegten Myonen. Ist die Lebensdauer der Myonen im Zähler-Inertialsystem t und im Myonensystem τ, so ergibt sich für die kinetische Energie der Myonen

$$E = \left(\frac{t}{\tau} - 1\right) \cdot m_0c^2 = 29 \cdot m_0c^2 = 3074 \text{ MeV}$$