

Physik der Materie

FSU Jena - SS 2007

Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

6. Februar 2008

Aufgabe 01

Durch die Beschleunigung in einem Potentialabfall von $U = 100 \text{ kV}$ bekommen die Elektronen die kinetische Energie

$$E = Ue$$

was einem Impuls

$$p = \sqrt{2mE} = \sqrt{2meU}$$

entspricht. Man kann also von einer Wellenlänge der Elektronen reden, die gegeben ist durch

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

und ein maximales Auflösungsvermögen

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\lambda^3 C_\delta} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{h^3 C_\delta}{(2meU)^{\frac{3}{2}}}}$$

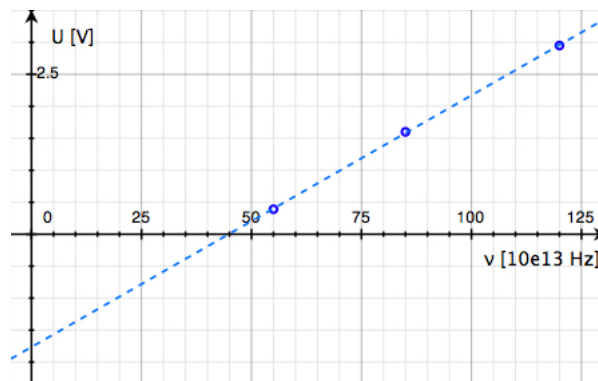
erlaubt!

Aufgabe 02

Laut Theorie ist die maximale Bremsstrahlung im Photoeffekt gegeben durch

$$U = \frac{h}{e} \nu - \frac{\Phi}{e}$$

wobei Φ die Austrittsarbeit des Materials ist. Ist β der Schnittpunkt der sich ergebenden Geraden mit der y -Achse, so ergibt sich die Austrittsarbeit als $\Phi = -\beta e$. Mit den gemessenen Daten ergibt sich folgende Graphik

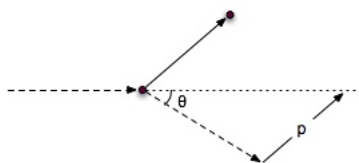


aus der abzulesen ist $\beta \approx -1.7647 \text{ V}$ und somit

$$\Phi \approx 1.7647 \text{ eV}$$

Aufgabe 03

Betrachten ein ruhendes Elektron der Masse m_e und ein sich auf der x-Achse bewegendes Photon der Wellenlänge λ_1 , das um den Winkel ϑ gestreut wird und dem Elektron den Impuls p überträgt:



Dann ergibt sich aufgrund der Energieerhaltung die Bedingung

$$E_1 = m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda_1} = E_2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + \frac{hc}{\lambda_2}$$

Aufgrund der Impulserhaltung, ergibt sich im Impulsraum $\mathbb{R}^2$ durch geometrische Überlegungen die aus der oberen Skizze abzulesende Gleichung

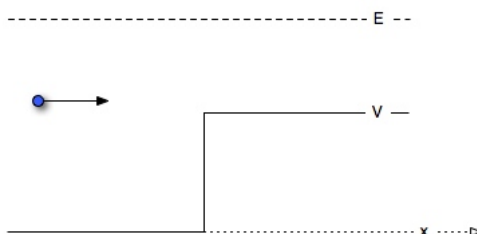
$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \vartheta = \frac{h^2}{\lambda_1^2} + \frac{h^2}{\lambda_2^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda_1 \lambda_2} \cos \vartheta$$

wobei p_1 und p_2 die Impulse des Photons vor und nach dem Stoß sind! Die Wellenlänge λ_2 einer um den Winkel $\vartheta = 45^\circ$ gestreuten Welle der Frequenz $f_1 = 10^{16} \text{ Hz}$ ergibt sich nach gegebener Formel als

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) = \frac{c}{f_1} + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta)$$

Aufgabe 04

Betrachten die Materiewelle der Energie $E > V$ bzw. Teilchen der Masse m das sich o.B.d.A in x-Richtung bewege. Die Potentialstufe befinde sich im Ursprung.



Wir wollen die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ des Teilchens bestimmen, verwenden dazu die allgemeine Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, t) \right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

und schreiben

$$\mathbf{x} < \mathbf{0} : -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

Wir machen den Ansatz

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot e^{-i\omega t}, \quad \omega := \frac{E}{\hbar}$$

und erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\mathbf{x} < \mathbf{0} : -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\varphi(x)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Deren allgemeine Lösungen ergeben sich als

$$\mathbf{x} < \mathbf{0} : \varphi(x) =: \varphi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad A, B \in \mathbb{C}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : \varphi(x) =: \varphi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}, \quad C, D \in \mathbb{C}$$

Da man für $x > 0$ keine Bewegung in $-x$ Richtung erwartet, ist automatisch $D = 0$. Durch die Randbedingungen

$$\varphi_1(0) \stackrel{!}{=} \varphi_2(0) \quad \wedge \quad \varphi_1'(0) \stackrel{!}{=} \varphi_2'(0) \quad : \quad \text{Stetigkeit der 0. und 1. Ableitung}$$

bekommt man

$$A + B = C \quad \wedge \quad C = \frac{k_1}{k_2}(A - B) \quad \rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

Die Reflexion ergibt sich als das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten der reflektierten zu den aufprallenden Teilchen gemäß

$$R = \frac{B^2}{A^2}$$

also

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-V}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{V}{E}}} \right|^2$$

Man sieht dass die Reflexion mit $V \geq 0$ streng monoton wächst, und für $V = E$ genau 1 wird. Bei einem klassischen Teilchen würde man im Gegensatz zu hier, für $V < E$ eine Reflexion $R = 0$ erwarten.

Aufgabe 05

Betrachten ein Wasserstoffatom, in dem das Elektron der Masse m mit einer Geschwindigkeit v um den Radius r auf einer festen Kreisbahn kreise. Im Gleichgewicht muss gelten

$$F_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \stackrel{!}{=} \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}$$

Durch die Quantisierungsbedingung des Bahndrehimpulses

$$mvr \stackrel{!}{=} n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}$$

ergibt sich ferner

$$v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{r^2m^2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{e^2m^2}$$

und somit für die Energie des Elektrons im n -ten Energiezustand

$$E = U + E_{kin} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{e^4m}{32\pi^2\epsilon_0^2 n^2 \hbar^2} \approx -13.6 \text{ eV}$$

Ionisiert man das Wasserstoffatom aus dem Grundzustand n so erfordert dies eine Energie von $E = -E_1 \approx 13.6 \text{ eV}$, da dies einer Beförderung in das ∞ -Energieniveau heißen würde, wo die Energie genau 0 ist.

Aufgabe 06

Die K-Schale entspricht einer Hauptquantenzahl $n = 1$, der wiederum nur 1 Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ und 1 magnetische Quantenzahl $m_l = 0$ zugeordnet werden kann. Nach dem Pauliprinzip kann also diese Schale nur mit 2 Elektronen besetzt werden. Der L-Schale ($n = 2$) können maximal 2 Drehimpulsquantenzahlen $l \in \{0, 1\}$ und somit jeweils 1 ($m_0 = 0$) und 3 ($m_1 \in \{-1, 0, 1\}$) magnetische Quantenzahlen zugeordnet werden, was wiederum einer maximalen Anzahl von 8 Elektronen entspricht. Analog kann die M-Schale ($n = 3$) maximal 18 Elektronen halten ($l \in \{0, 1, 2\}$), $m_0 = 0$, $m_1 \in \{-1, 0, 1\}$, $m_2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Da die Elektronen ohne äußere Einflüsse stets streben einen minimalen Energiezustand zu besetzen, werden alle genannten Schalen mit wachsendem n gefüllt. Somit ergibt sich die gesamte Elektronenkonfiguration theoretisch als

$$L^2 K^8 M^9$$

Aufgabe 07

Aufgrund des durch den Bahndrehimpuls $\vec{l}$ entstehenden magnetischen Dipolmomentes $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \cdot \vec{l}$ eines Elektrons im $l = 1$ bzw. $l = 2$ Orbital hat das Elektron die zusätzliche, durch die Kopplung mit dem Magnetfeld entstehende, potentielle Energie

$$E_z = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} \cdot \vec{l} \cdot \vec{B}$$

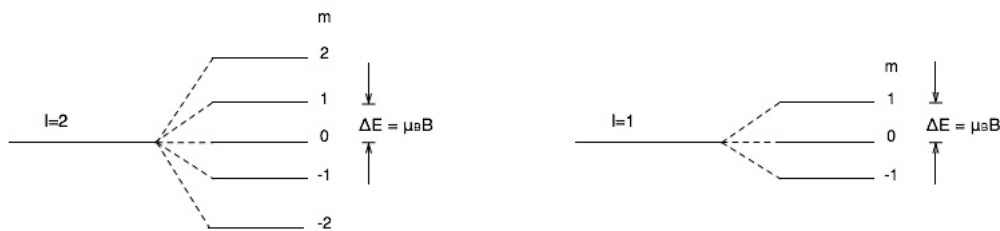
Betrachten wir den Drehimpuls des Elektrons im Koordinatensystem des Atoms, so ist die eine Komponente (o.B.d.A z-Komponente) des Drehimpulses gegeben durch

$$l_z = m_l \hbar, \quad m_l \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$$

Die anderen beiden Komponenten sind nicht fest definiert bzw. heben sich im zeitlichen Mittel auf, so dass sich das Elektron so einrichtet dass $\vec{e}_z \parallel \vec{B}$ ist. Somit ergibt sich die gesamte Energie des Elektrons als

$$E = E_0 + E_z = E_0 + \frac{e}{2m} \cdot l_z B = E_0 + \underbrace{\frac{e\hbar}{2m}}_{\mu_B} \cdot m_l B$$

wobei μ_B das Bohrsche Magneton genannt wird. So erhält man zum Beispiel für $l = 1$ bzw. $l = 2$ die folgenden Energieaufspaltungen



Ein Übergang ist im allgemeinen nur zwischen Orbitalen mit konsekutiven magnetischen Quantenzahlen und/oder konsekutiven Bahndrehimpulsquantenzahlen möglich:

$$\Delta m = 0, \pm 1, \quad \Delta l = \pm 1$$