

Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Zusatzaufgaben - Lösungen

Stilianos Louca

27. Juli 2008

Aufgabe 01

Das Spektrum ist gegeben durch

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{i\omega t} dt = \frac{u_0 T}{2} e^{-|\omega|T}$$

(vgl. Übungsserie 01, Aufgabe 02)

Aufgabe 02

Machen den Ansatz

$$P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad E(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

gehen damit in die DGL ein

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + g \frac{d}{dt} \right] P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(\omega) [(-i\omega)^2 - ig\omega] e^{-i\omega t} d\omega \stackrel{!}{=} \varepsilon_0 \omega_p^2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

und erhalten die algebraische Gleichung

$$\tilde{P}(\omega) = \underbrace{\frac{\omega_p^2}{-\omega^2 - ig\omega}}_{\chi(\omega)} \cdot \varepsilon_0 \tilde{E}(\omega)$$

bzw. die Dielektrizitätsfunktion von Metall

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2 + g^2}{\omega^2 + g^2} + i \frac{\omega_p^2 g}{\omega^3 + g^2 \omega}$$

Für $\omega > \sqrt{\omega_p^2 - g^2}$ ist

$$\Re \varepsilon(\omega) > \frac{\omega_p^2 - g^2 - \omega_p^2 + g^2}{\omega^2 + g^2} = 0$$

$$0 \leq \Im \varepsilon(\omega) < \frac{\omega_p^2 g}{\omega(\omega_p^2 - g^2 + g^2)} = \frac{g}{\omega} \stackrel{\omega_p \gg g}{\approx} 0$$

Eine Dielektrizitätsfunktion mit positiven Realteil und verschwindenden Imaginärteil ist charakteristisch für Glas im sichtbaren Bereich und impliziert die Transparenz des Materials.

Aufgabe 03

Betrachten den komplexen Bündelparameter

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda_n}{\pi w^2(z)}$$

wobei R und w jeweils der Phasenkrümmungsradius und der Bündelradius seien. Bei $z = 0$ ist abzulesen

$$R(0) = \infty, \quad w(0) = w_0$$

das heißt es ist

$$q_0 := q(0) = -i \underbrace{\frac{\pi w_0^2}{\lambda_n}}_{\alpha}$$

Die der Sammellinse entsprechende Matrix (vgl. Matrizen-Optik) ist gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

so dass sich der komplexe Bündelparameter direkt *nach* der Linse ergibt gemäß

$$q_1 := q(0^+) = M(q(0)) = \frac{q_0}{-\frac{q_0}{f} + 1}$$

Gesucht ist der Abstand d von der Linse, für den der Bündel minimale Breite bzw. einen Krümmungsradius ∞ hat, das heißt

$$\frac{1}{R(d)} = \Re \left\{ \frac{1}{q(d)} \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

Dabei ist $q(d) = q_1 + d$, und somit

$$\Re \left\{ \frac{1}{q(d)} \right\} = \Re \left\{ \frac{f - q_0}{f q_0 - d q_0 + d f} \right\} = \frac{d(f^2 - \alpha^2) + \alpha^2 f}{d^2 f^2 + \alpha^2 (d - f)^2} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow d = \frac{\alpha^2 f}{\alpha^2 - f^2}$$

was einen Tailen-Abstand von

$$d = \frac{\pi^2 w_0^4 f}{\pi^2 w_0^4 - \lambda_n^2 f^2}$$

impliziert.

Beachte: Mit $\lambda_n \rightarrow 0$ geht $d \xrightarrow{\lambda_n \rightarrow 0} f$ was genau dem strahlenoptischen Fall entspricht!

Aufgabe 04

- a) Bekanntlich hängt χ über $\chi = \mathcal{F}(R)$ mit der Responce-Funktion $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Materials zusammen. Da R rein reell ist, gilt bekanntlich $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$ für beliebige $\omega \in \mathbb{R}$, so dass für $\omega < 0$ folgt

$$\Im \{ \chi(\omega) \} = \Im \{ \chi(-(-\omega)) \} = \Im \{ \chi^*(-\omega) \} = -\Im \{ \underbrace{\chi(-\omega)}_{>0} \} = -A\delta(-\omega - \omega_0) = -A\delta(\omega + \omega_0)$$

Zusammengefasst also

$$\Im \{ \chi(\omega) \} = A\delta(\omega - \omega_0) - A\delta(\omega + \omega_0), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

- b) Durch die Kramers-Kronig Relation folgt

$$\Re \{ \chi(\omega) \} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Im \{ \chi(\tau) \}}{\tau - \omega} d\tau = \frac{A}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\tau - \omega} \cdot [\delta(\tau - \omega_0) - \delta(\tau + \omega_0)] d\tau = \frac{A}{\pi} \left[\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{\omega_0 + \omega} \right] = \frac{2\omega_0 A}{\pi(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Aufgabe 05

- a) Das Spektrum des Pulses ist am Anfang gegeben durch

$$\tilde{u}(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} u(t, 0) dt = \frac{u_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{T_0^2} + i(\omega - \omega_0)t} dt = \frac{u_0 T_0}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4/T_0^2}}$$

- b) Die Übertragungsfunktion im homogenen Raum ist gegeben durch $H(\omega, z) = e^{ik(\omega)z}$, das heißt

$$\tilde{u}(\omega, L) = H(\omega, L) \cdot \tilde{u}(\omega, 0) = \frac{u_0 T_0}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4/T_0^2}} \cdot e^{ik(\omega)L} = \frac{u_0 T_0}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4/T_0^2}} \cdot e^{iLk_R(\omega)} \cdot e^{-\frac{L}{2}[a_0 - a_1(\omega - \omega_0)^2]}$$

Unter quadratischer Näherung von k_R :

$$k_R(\omega) \approx \underbrace{k(\omega_0)}_{k_0} + \underbrace{\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0}}_{\frac{1}{v_g}} (\omega - \omega_0) + \underbrace{\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0}}_{\frac{D}{2}} (\omega - \omega_0)^2$$

also

$$\tilde{u}(\omega, L) \approx \frac{u_0 T_0}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{La_0}{2}} \cdot \exp \left\{ -(\omega - \omega_0)^2 \cdot \left[\frac{T_0^2}{4} - \frac{La_1}{2} - i \frac{LD}{2} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ iL \cdot \left[k_0 + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g} \right] \right\}$$

- c) Bei verschwindender Dispersion ($D \approx 0$) hat das Spektrum

$$\tilde{u}(\omega, L) \approx \frac{u_0 T_0}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{La_0}{2}} \cdot \exp \left\{ -(\omega - \omega_0)^2 \cdot \left[\frac{T_0^2}{4} - \frac{La_1}{2} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ iL \cdot \left[k_0 + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g} \right] \right\}$$

ein Gaussförmiges Profil. Der Puls $u(t, L) = \mathcal{F}(\tilde{u}(\cdot, L))(t)$ ist somit auch stets Gaussförmig, und ist bekanntlich von der Form

$$u(t, L) \sim \exp \left\{ -\frac{t^2}{4 \left[\frac{T_0^2}{4} - \frac{La_1}{2} \right]} \right\}$$

wobei sofort die Breite

$$W = \sqrt{T_0^2 - 2La_1}$$

abzulesen ist.

- d) Für $D \neq 0$ ist analog zu vorhin nach Rücktransformation

$$u(t, L) \sim \exp \left\{ -\frac{t^2}{4 \left[\frac{T_0^2}{4} - \frac{La_1}{2} - i \frac{LD}{2} \right]} \right\} = \exp \left\{ -t^2 \cdot \left[\frac{T_0^2 - 2La_1}{(T_0^2 - 2La_1)^2 + 4L^2 D^2} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ -i \frac{2LDt^2}{(T_0^2 - 2La_1)^2 + 4L^2 D^2} \right\}$$

woraus die Breite

$$W = \sqrt{\frac{(T_0^2 - 2La_1)^2 + 4L^2 D^2}{T_0^2 - 2La_1}}$$

abzulesen ist.

Aufgabe 06

Das Ortsfrequenzspektrum ist gegeben durch

$$\tilde{u}_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{w_0^2} + i k_x x} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{w_0^2} + i k_y y} dy = \frac{w_0^2}{4\pi} \cdot e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{4/w_0^2}}$$

Dabei werden prinzipiell nur die Moden übertragen für die gilt

$$\rho_k^2 := k_x^2 + k_y^2 < k_0^2 \underbrace{\varepsilon(\omega)}_{n^2=1}$$

das heißt der Anteil $\mathcal{R}$ der übertragenen Energie ist

$$\mathcal{R} = \frac{\int_{\rho_k < k_0} |\tilde{u}_0(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y}{\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}_0(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y} = \frac{\int_0^{k_0} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho_k^2 w_0^2}{2}} \rho_k d\rho_k d\varphi}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho_k^2 w_0^2}{2}} \rho_k d\rho_k d\varphi} = \frac{\left[e^{-\frac{\rho_k^2 w_0^2}{2}} \right]_0^{k_0}}{\left[e^{-\frac{\rho_k^2 w_0^2}{2}} \right]_0^\infty} = 1 - e^{-\frac{k_0^2 w_0^2}{2}}$$

Für vorgegebenen mindest-Anteil $\mathcal{R}$ muss also gelten

$$1 - e^{-\frac{k_0^2 w_0^2}{2}} \stackrel{!}{\geq} \mathcal{R} \rightsquigarrow w_0 \geq \frac{1}{k_0} \sqrt{-2 \ln(1 - \mathcal{R})} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{-\frac{\ln(1 - \mathcal{R})}{2}}$$

Speziell für $\mathcal{R} = \frac{1}{2}$ also

$$w_0 \geq \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

Aufgabe 07

- a) **Annahme:** Es ist $0 \neq k_{xs} \in \mathbb{R}$ (Propagation in Richtung Grenzfläche).
Es tritt genau dann Totalreflexion an der Grenzfläche auf, wenn

$$|R_{TE}| = \frac{|k_{xs} - k_{xc}|}{|k_{xs} + k_{xc}|} = 1$$

ist, das heißt

$$\begin{aligned} |k_{xs}|^2 + |k_{cs}|^2 - k_{xs} \overline{k_{xc}} - k_{xc} \overline{k_{xs}} &= (k_{xs} - k_{xc}) \overline{(k_{xs} - k_{cs})} = |k_{xs} - k_{xc}|^2 \\ &\stackrel{!}{=} |k_{xs} + k_{xc}|^2 = |k_{xs}|^2 + |k_{cs}|^2 + k_{xs} \overline{k_{xc}} + k_{xc} \overline{k_{xs}} \\ \Leftrightarrow k_{xc} \cdot \underbrace{\overline{k_{xs}}}_{k_{xs}} &= -\overline{k_{xc}} \cdot k_{xs} \Leftrightarrow k_{xc} = -\overline{k_{xc}} \Leftrightarrow \Re(k_{xc}) = \Re \left\{ \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_c(\omega) - k_z^2} \right\} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_s(\omega)$ und $\varepsilon_c(\omega)$ jeweils die Dielektrizitätsfunktionen im Substrat und Cladding sind. Es muss also gelten

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s - k_{xs}^2 = k_z^2 \stackrel{!}{>} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_c \Rightarrow k_{xs}^2 < \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_s - \varepsilon_c)$$

- b) Es trete nun Totalreflexion auf, das heißt es sei $k_{xc} = i\mu_{xc}$, $\mu_{xc} > 0$. Der Phasensprung entspricht genau

$$\arg R_{TE} = \arg \left\{ \frac{k_{xs} - i\mu_{xc}}{k_{xs} + i\mu_{xc}} \right\} = \arg(k_{xs} - i\mu_{xc}) - \arg \underbrace{(k_{xs} + i\mu_{xc})}_{\substack{k_{xs} - i\mu_{xc} \\ = -\arg(k_{xs} - k_{xc})}} = 2 \arg(k_{xs} - i\mu_{xc}) \stackrel{k_{xs} > 0}{=} -2 \arctan \frac{\mu_{xc}}{k_{xs}}$$

Aufgabe 08

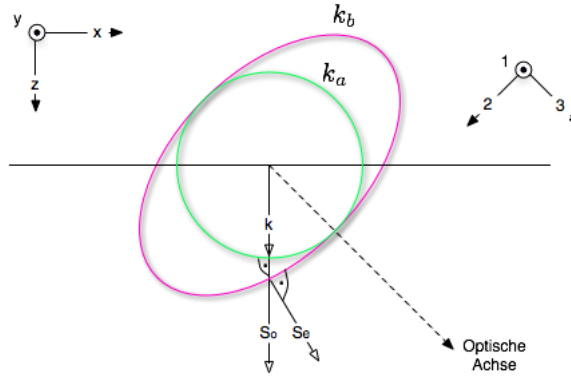
Koordinatensystem: Es sei $\vec{e}_z$ senkrecht zur Schnittfläche.

- a) Da $k_x = 0$ stetig übergehen muss, ist der Wellenvektor $\vec{k}$ auch im Kristall stets senkrecht zur Schnittfläche. Doch entsprechen im Kristall den beiden (senkrecht zu einander polarisierten) Normalmoden zwei unterschiedliche (effektive) Brechungsindizes n_a, n_b , und der Energiefluss ($\rightarrow$ Poyntingvektor) erfolgt im allgemeinen nicht in die gleiche Richtung, sondern jeweils senkrecht zur Lösungsfläche (ordentlich, außerordentlich) des entsprechenden Brechungsindex. Es wird also eine Strahlungsaufspaltung beobachtet.
- b) Im folgenden ist der Schnitt der beiden Normalenflächen

$$\text{Ordentlich: } k_a : \|k\| = k_0 n_o \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\text{Außerordentlich: } k_b : \frac{k_1^2}{n_e^2 k_0^2} + \frac{k_2^2}{n_e^2 k_0^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2 k_0^2} = 1$$

illustriert



wobei k_1, k_2, k_3 jeweils im Hauptachsenkoordinatensystem des Kristalls zu deuten sind, also insbesondere sei $\vec{e}_3$ in Richtung der optischen Achse gerichtet. Der Abstand des Ursprungs und Schnittpunktes der jeweiligen Fläche mit dem $\vec{k}$ -Vektor, entspricht dem effektiven Wellenvektor in diese Richtung.

- c) Die beiden entstehenden Strahlen (Normalmoden) sind beide linear polarisiert. Speziell:
- **Ordentlich:** $\vec{E}$ und $\vec{D}$ -Feld sind beide in gleicher Richtung, senkrecht zur vom $\vec{k}$ -Vektor und der optischen Achse aufgespannten Ebene polarisiert.
 - **Außerordentlich:** $\vec{E}$ und $\vec{D}$ -Feld liegen beide in der von $\vec{k}$ und der optischen Achse aufgespannten Ebene. Dabei ist $\vec{E} \perp \vec{S}$ und $\vec{D} \perp \vec{k}$. Im allgemeinen ist jedoch $\vec{E} \nparallel \vec{D}$.
- d) Beide $\vec{k}$ -Vektoren, jeweils mit dem Betrag $k_a = k_0 n_a$, $k_b = k_0 n_b$, stehen beide stets senkrecht zur Schnittfläche, also im Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ zur optischen Achse. Im Falle des ordentlichen Strahls ist auch $\vec{S}_a \parallel \vec{k}_a$. Im Falle des außerordentlichen Strahls ist $\vec{S}_b$ senkrecht zur entsprechenden Normalenfläche, das heißt

$$\vec{S}_b \sim \text{grad}_{\vec{k}} \left(\frac{k_1^2}{n_e^2 k_0^2} + \frac{k_2^2}{n_e^2 k_0^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2 k_0^2} \right) \sim \frac{k_1}{n_e^2} \vec{e}_1 + \frac{k_2}{n_e^2} \vec{e}_2 + \frac{k_3}{n_o^2} \vec{e}_3$$

Wegen $\vec{e}_z = \cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3$, $\vec{k} = k \vec{e}_z$ ist somit

$$\vec{S} \sim \frac{\cos \alpha}{n_e^2} \vec{e}_2 + \frac{\sin \alpha}{n_o^2} \vec{e}_3$$

das heißt

$$\cos \widehat{\vec{S}, \vec{e}_3} = \frac{\langle \vec{S}, \vec{e}_3 \rangle}{\|\vec{S}\| \cdot \|\vec{e}_3\|} = \frac{n_e^2 \sin \alpha}{\sqrt{n_o^4 \cos^2 \alpha + n_e^4 \sin^2 \alpha}}$$

Aufgabe 09

- a) Es muss stets gelten $n_f > n_s$.
- b) Der effektive Index der geführten Mode liegt im Intervall (n_s, n_f) .
- c) Beginnen mit der Dispersionsrelation für symmetrische Schichtwellenleiter

$$\tan(k_{fx}d) = \frac{2k_{fx}\mu_s}{k_{fx}^2 - \mu_s^2}, \quad k_{xs} = i\mu_s$$

und betrachten den Grenzübergang zwischen propagierender und evaneszenter Welle im Substrat: $\mu_s = 0$:

$$\tan(k_{fx}d) = 0 \rightarrow (k_{fx}d)_m = m\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

wobei

$$k_{fx}^2 = k_0^2 \varepsilon_f - k_z^2 = k_0^2 \varepsilon_f - (k_0^2 \varepsilon_s - k_{sx}^2) \stackrel{k_{sx}=0}{=} k_0^2 (\varepsilon_f - \varepsilon_s), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

das heißt die entsprechende *cut-off* Dicke ist

$$d = \frac{m\pi}{k_{fx}} = \frac{m\pi c}{\omega \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}}$$

Die Anzahl $N(d)$ der möglichen Moden im Wellenleiter hängt monoton wachsend mit der Dicke d zusammen, wobei für festes ω , durch Erhöhen einer *cut-off* Dicke gerade eine neue Mode dem Lösungsraum *hinzugefügt* wird. Im Grenzfall $d \rightarrow 0$ beträgt die Anzahl der Moden genau 1, das heißt für eine Dicke d gibt es genau

$$M = 1 + \left\lfloor d \frac{\omega}{\pi c} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} \right\rfloor$$

Moden. fordern wir die Monotonie des Wellenleiters, so muss gelten

$$\left\lfloor d \frac{\omega}{\pi c} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} \right\rfloor = 0 \rightarrow d \frac{\omega}{\pi c} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} \in [0, 1)$$

das heißt

$$d < \frac{\pi c}{\omega \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}}$$

Aufgabe 10

Bekanntlich ist für einen Gaußförmigen, örtlich unendlich ausgebreiteten Puls der Breite T_0 die Dispersionslänge gegeben durch

$$L_D = \frac{T_0^2}{|D|}$$

wobei

$$D(\omega) = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Big|_{\omega} = 2b(\omega - \omega_0)$$

die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit ist, das heißt

$$L_D = \frac{T_0^2}{2|b(\omega - \omega_0)|}$$

Aufgabe 11

- a) Das hinter dem Gitter entstehende Bündel besteht durch die feine Struktur des Gitters aus der Mode 0. Ordnung ($k_x = 0$) und ansonsten aus vergleichsweise hohen Ortsfrequenzen in der Größenordnung

$$k_x \approx \frac{2\pi}{g} = \frac{6\pi}{\lambda} = 3k \gg k$$

Somit sind im wesentlichen alle restlichen Komponenten evaneszente Wellen, das Beugungsbild besteht also näherungsweise aus einer Ebenen, senkrecht zum Gitter verlaufenden, monochromatischen Welle.

Erläuterung: Betrachten eine Transferfunktion

$$T(x) = \sum_{n=-N}^N t_n(x), \quad t_n(x) = t(x - g \cdot n)$$

einer eindimensionalen, a -periodischen Anordnung einer Struktur, beschrieben durch $t(x)$. Das Spektrum von T ist gegeben durch

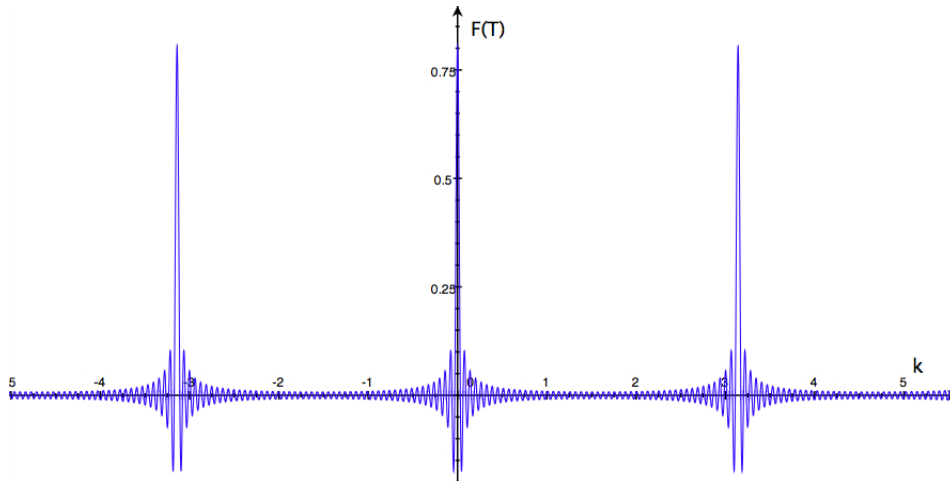
$$\tilde{T}(k) = \mathcal{F}(T)(k) = \sum_{n=-N}^N \mathcal{F}(t_n)(k) = \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{-ingk}}_{\text{Dirichlet Kern}} \cdot \underbrace{\mathcal{F}(t)(k)}_{\tilde{t}(k)} = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)gk\right]}{\sin\left(\frac{gk}{2}\right)} \cdot \tilde{t}(k)$$

Für genügend großes N kann man sagen: Der Dirichlet Kern wird eingehüllt durch das Spektrum $\tilde{t}$ von t . Zum Beispiel ergibt sich das Beugungsbild einer großzahligen, periodischen Anordnung von Spalten der Breite b im Abstand $g - b$, in Fraunhofernäherung genau als Einhüllung der sinc Funktion (Spektrum der Spalt-Transferfunktion) und des Dirichlet Kerns.

Betrachten nun der Einfachheit halber eine g -periodische Anordnung von $(2N+1)$ Spalten, deren Transferfunktion durch $t(x) = \frac{1}{N}\delta(x)$ genähert sei. Dann ergibt sich nach obigen Überlegungen das Spektrum der gesamt-Transferfunktion T gemäß

$$\tilde{T}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)gk\right]}{\sin\left(\frac{gk}{2}\right)}$$

Diese sei für $g = 2, N = 50$ im folgenden illustriert:



Dabei hat dieses Spektrum stets die Eigenschaften:

- Für genügend großes N konzentriert sich der Träger im wesentlichen auf $\frac{2\pi}{g}$ -periodisch angeordnete Umgebungen.
- Näherungsweise (für großes N) gilt also: das Spektrum besteht aus diskret verteilten Moden, die den Ortsfrequenzen $k_n = n \frac{2\pi}{g}$ entsprechen.

Ist das Gitter nun fein genug (also g klein genug), so ist für $n \geq 1$ stets $|k_n| \geq k_0 = \frac{\varepsilon}{c}$, das heißt es wird nur die Grundmode übertragen.

- b) Wir gehen zur Fresnelschen Näherung über, das heißt nehmen an dass der Träger des Spektrums $\tilde{u}_0$ von u stark um die 0 beschränkt ist, das heißt machen die Näherung

$$k_z(k_x) = \sqrt{k^2 - k_x^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} \approx k \left[1 - \frac{k_x^2}{2k^2} \right] = k - \frac{k_x^2}{2k}$$

Betrachten die entsprechende Übertragungsfunktion

$$\mathcal{H}_F(k_x, z) = e^{ikz} e^{-i \frac{k_x^2}{2k} z}$$

Für das Feld $u_0(x)$ ergibt sich somit

$$u(x, z) \approx \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_0(k_x) \mathcal{H}_F(k_x, z) \cdot e^{ik_x x} dk_x = e^{ikz} \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_0(k_x) e^{ik_x x - i \frac{k_x^2}{2k} z} dk_x$$

Aufgabe 12

Betrachten zunächst das Spektrum eines einzelnen Spaltes der Breite $b = 2\beta$, beschrieben durch die Transferfunktion $t_0(x, y) = \Theta(\beta - |x|)$:

$$\tilde{t}_0(k_x, k_y) = \mathcal{F}(t_0)(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} t_0(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-ik_x x} dx \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_y y} dy}_{2\pi \delta(k_y)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \delta(k_y) \cdot \frac{1}{-ik_x} [e^{-ik_x x}]_{-\beta}^{\beta} = \frac{1}{\pi} \beta \frac{\sin(k_x \beta)}{\beta k_x} \delta(k_y) = \frac{\beta}{\pi} \text{sinc}(k_x \beta) \delta(k_y) = \frac{b}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{bk_x}{2}\right) \delta(k_y)$$

Dementsprechend ist das Spektrum des Doppelspaltes, beschrieben durch

$$t(x, y) = \underbrace{t_0\left(x - \frac{g}{2}\right)}_{t_0^-(x, y)} + \underbrace{t_0\left(x + \frac{g}{2}\right)}_{t_0^+(x, y)}$$

gemäß

$$\tilde{t}(k_x, k_y) = \mathcal{F}(t_0^-)(k_x) + \mathcal{F}(t_0^+)(k_x, k_y) = e^{-i \frac{g}{2} k_x} \underbrace{\mathcal{F}(t_0)(k_x, k_y)}_{\tilde{t}_0(k_x, k_y)} + e^{i \frac{g}{2} k_x} \underbrace{\mathcal{F}(t_0)(k_x, k_y)}_{\tilde{t}_0(k_x, k_y)}$$

$$= \frac{b}{2\pi} \delta(k_y) \cdot \underbrace{\left[e^{-i \frac{g}{2} k_x} + e^{i \frac{g}{2} k_x} \right]}_{2 \cos \frac{g k_x}{2}} \text{sinc}\left(\frac{b k_x}{2}\right) = \frac{b}{\pi} \delta(k_y) \cos\left(\frac{g k_x}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{b k_x}{2}\right)$$

Im Sinne der Fraunhofer-Näherung ist somit das Beugungsbild des Doppelspaltes gegeben durch

$$u(x, y, z) = -i \frac{(2\pi)^2}{\lambda z} e^{ikz} \tilde{t}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right) e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} = -i \frac{4\pi b}{\lambda z} e^{ikz} \cos\left(\frac{kg}{2} \frac{x}{z}\right) \text{sinc}\left(\frac{kb}{2} \frac{x}{z}\right) \delta\left(k \frac{y}{z}\right) e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)}$$

wodurch sich Intensitätsverteilung erweist als

$$I(x, y, z) \sim |u(x, y, z)|^2 = \frac{(4\pi b)^2}{(\lambda z)^2} \delta^2\left(k \frac{y}{z}\right) \cos^2\left(\frac{kg}{2} \frac{x}{z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{kb}{2} \frac{x}{z}\right)$$

Damit die Fraunhofer-Näherung überhaupt anwendbar ist, muss die Fresnelzahl $N_F = \frac{\max\{b, g\}}{\lambda z}$ kleiner als etwa 0.1 sein, das heißt der Abstand z sollte mindestens

$$z_{\min} = \frac{10}{\lambda} \max\{b, g\}$$

betragen.

Aufgabe 13

Bekanntlich ist das Feld bei Oberflächenpolaritonen rein TM-Polarisiert, das heißt

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_y \neq 0$$

wobei $\vec{e}_z$ entlang der Grenzfläche bzw. Ausbreitungsrichtung und $\vec{e}_x$ senkrecht zu dieser Zeige. Zu klären wäre: Ist $E_z \neq 0$?
Beginnend mit der Maxwellgleichung

$$\text{rot } \vec{H} = -\varepsilon_0 \varepsilon_i(\omega) \dot{\vec{E}}$$

für monochromatische Wellen im i -ten Material, schreiben wir

$$-\varepsilon_0 \varepsilon_i(\omega) \begin{pmatrix} \dot{E}_x \\ 0 \\ \dot{E}_z \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{H} = \begin{pmatrix} \partial_y H_z - \partial_z H_y \\ 0 \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x \end{pmatrix} \stackrel{\partial_z \equiv 0}{=} \begin{pmatrix} -\partial_z H_y \\ 0 \\ \partial_x H_y \end{pmatrix}$$

Da das Feld allgemein im Substrat und Cladding in x -Richtung per Definition abfällt, ist $\partial_x H_y \neq 0$, das heißt $\dot{E}_z \neq 0$ und kann E_z nicht konstant 0 sein. Es gibt also tatsächlich eine Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung.

Aufgabe 14

Annahme: Das Haar ist unendlich lang und gestreckt.

Die Transferfunktion t_h des Haares sei gegeben durch $t_h = 1 - t_s$, wobei $t_s = \Theta(d - |x|)$ die Transferfunktion eines Spaltes der Dicke $D = 2d$ ist. Das Spektrum $\tilde{t}_h$ von t_h ist daher gegeben durch

$$\tilde{t}_h(k_x, k_y) = \mathcal{F}(t_h)(k_x, k_y) = \underbrace{\mathcal{F}(1)(k_x, k_y)}_{\delta(k_x)\delta(k_y)} - \mathcal{F}(t_s)(k_x, k_y) \stackrel{(12)}{=} \delta(x)\delta(y) - \frac{D}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{Dk_x}{2}\right) \delta(y)$$

In Fraunhofernäherung ergibt sich dann das Beugungsbild gemäß

$$u(x, y, z) = -i \frac{(2\pi)^2}{\lambda z} e^{ikz} \tilde{t}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right) e^{i \frac{k}{2z}(x^2+y^2)} = -i \frac{2\pi b}{\lambda z} e^{ikz} e^{i \frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \cdot \left[\delta\left(k \frac{x}{z}\right) - \frac{D}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{kD}{2} \frac{x}{z}\right) \right] \delta\left(k \frac{y}{z}\right)$$

(vgl. Babinet'sches Theorem)

Aufgabe 15

Die Matrizen M_1, M_l, M_2 des 1. Freiraums, der Linse und des 2. Freiraums sind jeweils gegeben durch

$$M_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & d_{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

so dass sich die Gesamtmatrix des Systems ergibt als

$$M = M_2 M_l M_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix}$$

Ein (1-dimensionales) Objekt im Abstand g vor der Linse werde auf die Ebene im Abstand b hinter der Linse abgebildet. Insbesondere bedeutet dies: zu jedem Punkt P_g des Objekts, existiert ein Punkt P_b in der Bildebene, so dass jeder von P_g ausgehende Strahl durch P_b geht. Der Abstand des Strahls von der optischen Achse in der Bildebene darf also nicht vom ursprünglichen Neigungswinkel abhängen, das heißt im Kontext der Matrizenoptik, mit

$$\vec{x}_b = \begin{pmatrix} y_b \\ \vartheta_b \end{pmatrix} = M \vec{x}_g = \begin{pmatrix} M_{11}y_g + M_{12}\vartheta_g \\ M_{21}y_g + M_{22}\vartheta_g \end{pmatrix}, \quad y: \text{Abstand von optischer Achse}, \quad \vartheta: \text{Neigungswinkel}$$

und der System-Matrix M gilt $M_{12} = 0$. Somit ist nach obigem Ergebnis

$$g + b - \frac{gb}{f} = 0 \rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

Aufgabe 16

Im linearen Bild des Systems sind die entsprechenden Matrizen M_s, M_r des Spiegels bzw. dazwischen liegenden Raums gegeben durch

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_r = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Strahl befinde sich o.B.d.A am linken Spiegel und propagiere nach Rechts. Der Strahl (beschrieben durch den Vektor $\vec{x}_0 = (y_0, \vartheta_0)$) ist genau dann rekonstruiert, wenn er in die gleiche Richtung propagiert und am gleichen Ort ist, das heißt insbesondere:

- Der Strahl hat den gesamten Resonator eine ganze Anzahl N von Malen durchlaufen.
- Es gilt $M^N \vec{x}_0 = \vec{x}_0$ wobei M die einen kompletten Umlauf beschreibende Matrix ist.
- Da $\vec{x}_0$ beliebig sein sollte, muss $M^N = \text{Id}$ sein.

Es ist

$$M = M_s M_r \underbrace{M_s M_r}_L = L^2$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & d \\ \frac{2}{R} & \frac{2d}{R} + 1 \end{pmatrix} \neq \text{Id}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2d}{R} & 2d + \frac{2d^2}{R} \\ \frac{4}{R} + \frac{4d}{R^2} & \frac{6d}{R} + 1 + \frac{4d^2}{R^2} \end{pmatrix} \neq \text{Id}$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{6d}{R} + \frac{4d^2}{R^2} & 3d + \frac{8d^2}{R} + \frac{4d^3}{R^2} \\ \frac{6}{R} + \frac{16d}{R^2} + \frac{8d^2}{R^3} & \frac{12d}{R} + 1 + \frac{20d^2}{R^2} + \frac{8d^3}{R^3} \end{pmatrix} \stackrel{R \leq 0}{=} \text{Id}$$

Somit ist zum einen $L^4 = L \neq \text{Id}$, $L^5 = L^2 \neq \text{Id}$ und zum anderen $M^3 = L^6 = \text{Id}$, das heißt der Strahl reproduziert sich nach genau 3 kompletten Umläufen.

Aufgabe 17

Betrachten den komplexen Bündel-Parameter q für den gilt:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda_n}{\pi W^2(z)}$$

wobei $R(z)$ und $W(z)$ jeweils der Phasen-Krümmungsradius und $W(z)$ der Bündelradius (halbe Bündelbreite) seien. Dabei ist W definiert als der Abstand von der Symmetrieachse, bei dem die Amplitude auf den Wert $\frac{1}{e}$ abfällt. Bekanntlich ist der Abstand d der Taille vom Betrachtungspunkt gegeben durch

$$d = \Re(q) = \Re \left\{ \frac{1}{\frac{1}{R} + i \frac{i \lambda_n}{\pi W^2}} \right\} = \Re \left\{ \frac{\frac{1}{R} - i \frac{\lambda_n}{\pi W^2}}{\frac{1}{R^2} + \frac{\lambda_n^2}{\pi^2 W^4}} \right\} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{\lambda_n^2 R}{\pi^2 W^4}} \approx 1.055 \text{ m}$$

Aufgabe 19

a) Beginnen mit den Maxwellgleichungen im Fourierraum

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad \text{rot } \vec{B} = i\omega \mu(\omega) \mu_0 \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \vec{E} \quad (1)$$

schreiben

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{\frac{\rho_{\text{ext}}}{\varepsilon(\omega)\varepsilon_0} = 0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$= -i\omega \text{rot } \vec{B} = \omega^2 \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}} \mu(\omega) \varepsilon(\omega) \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\omega) \varepsilon(\omega) \vec{E}$$

und erhalten unter der Näherung in optischen Frequenzen $\mu \approx 1$ die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E} = 0$$

Betrachten wir nun eine im Metall propagierende ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad , \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (2)$$

und gehen damit in die Helmholtz-Gleichung ein

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E} = -\vec{k}^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{E} \stackrel{!}{=} 0$$

so erhalten wir die Dispersionsrelation

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon(\omega)$$

b) Beginnen mit den Maxwell-Gleichungen (1) und der Darstellung für ebene Wellen (2) und schreiben

$$0 = \operatorname{div} \vec{E} = \partial_i E_0^i e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \underbrace{k_i E_0^i}_{\vec{k} \cdot \vec{E}} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \partial_i E_0^j e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = i \underbrace{k_i E_0^j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k}_{\vec{k} \times \vec{E}_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i \vec{k} \times \vec{E} = -\mu_0 \mu(\omega) \dot{\vec{H}} = i \omega \mu_0 \mu(\omega) \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \mu(\omega) \vec{H} \Rightarrow \left\| \vec{k} \times \vec{E} \right\| \stackrel{\vec{k} \perp \vec{E}}{=} k E = \omega \|\mu_0 \mu(\omega) H\|_B = \omega B$$

$$\Rightarrow \frac{B}{E} = \frac{k}{\omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}$$

Speziell im Drude-Modell also

$$\frac{B}{E} = \frac{\sqrt{1 + \chi_0 + \chi_D(\omega)}}{c}$$

Aufgabe 20

Der Ölfilm bildet eine natürliche, dünne Schicht zwischen Wasser und Luft. Alle 3 Materialien haben ziemlich unterschiedliche Dielektrizitätsfunktionen so dass sie ein optisches Schichtsystem bilden, dessen Reflektivität unter anderem von der Wellenlänge, dem Einfallswinkel und der, kleinen Fluktuationen unterliegenden, Dicke des Films abhängt.

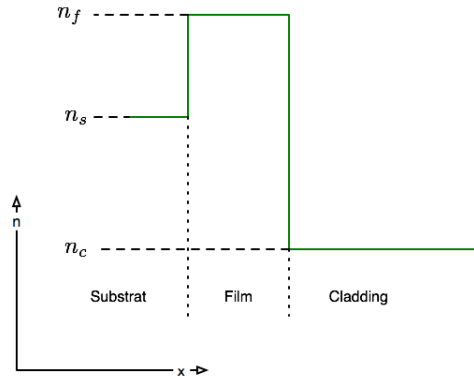
Licht, das von verschiedenen Punkten der Schicht auf unseren Augen trifft, besitzt unter anderem einen unterschiedlichen Einfallswinkel auf die Schicht, deren Dicke auch selbst lokal variiert, so dass je nach betrachteten Punkt verschiedene Wellenlängen (sprich Farben) unterschiedlich stark reflektiert werden, und so die eine oder andere Farbe stärker oder schwächer erscheint.

Aufgabe 21

a) Der effektive Brechungsindex n_e einer Normalmode im Film, definiert durch $n_e := \frac{k_z}{k_0}$, $k_0 := \frac{\omega}{c}$ muss im Intervall $(\max\{n_s, n_c\}, n_f)$ liegen, da stets gelten muss

$$\Re(k_{xs}) = \Re(k_{xc}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \wedge \quad \Im(k_{xs}) = \Im(k_{xc}) \stackrel{!}{\neq} 0 \rightarrow k_z^2 > k_0^2 \varepsilon_{s,c}(\omega) \rightarrow n_e = \frac{k_z}{k_0} > \sqrt{\varepsilon_{s,c}} = n_{s,c}$$

$$\Im(k_{xf}) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow k_z^2 \leq k_0^2 \varepsilon_f \rightarrow n_e \leq n_f$$



Dabei muss sogar n_e echt kleiner als n_f sein, denn: Ist $n_e = n_f$ so ist $k_{fx} = 0$. Das Feld muss demnach die Struktur haben:

$$F(x, z) = e^{ik_z z} \cdot \begin{cases} C e^{\mu_s x} & : x < 0 \\ A + B x & : 0 \leq x \leq d \\ D e^{-\mu_c (x-d)} & : x > d \end{cases}$$

wobei für TE Polarisation $F = E$, für TM Polarisation $F = H$ und allgemein $\mu_{s,c} = \sqrt{k_z^2 - k_0^2 \varepsilon_{s,c}} > 0$ ist.

- **TE Polarisation:** Das E -Feld und seine Normalenableitung muss stetig übergehen, das heißt

$$C = A \wedge A + dB = D \wedge \mu_s C = B \wedge -\mu_c D = B$$

Auflösen ergibt die Bedingung

$$B \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_s} + \frac{1}{\mu_c} + d \right)}_{\neq 0} \stackrel{!}{=} 0$$

woraus folgt $A = B = 0$, was ein Widerspruch zur Existenz des Feldes ist!

- **TM Polarisation:** Das H -Feld und $\frac{1}{\varepsilon} \partial_x H$ gehen stetig über, das heißt

$$C = A \wedge A + dB = D \wedge \frac{\mu_s C}{\varepsilon_s} = \frac{B}{\varepsilon_f} \wedge \frac{B}{\varepsilon_f} = -\frac{\mu_c D}{\varepsilon_c}$$

Auflösen ergibt analog zu vorhin die Bedingung

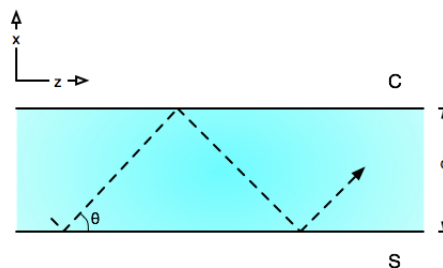
$$B \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_f \mu_s} + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_f \mu_c} + d \right)}_{\neq 0} \stackrel{!}{=} 0$$

und somit $A = B = 0$, was ein Widerspruch ist!

Demnach muss $n_e \in (\max\{n_s, n_c\}, n_f)$ sein.

- b) Betrachten im quasigeometrischen Bild die das Modenfeld bildenden Zig-Zag Wellen, die den effektiven Brechungsindex n_e besitzen mögen, das heißt es ist

$$k_{fx} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_f - k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_f^2 - n_e^2}$$



Die Reflektionskoeffizienten an den beiden Flächen mögen gegeben sein durch jeweils R_s und R_c , wobei $|R_{s,c}| = 1$ ist. Nun lautet die Stabilitätsbedingung

$$2k_{xf}d + \arg(R_s) + \arg(R_c) \stackrel{!}{=} 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Im Kontext des Näherungsmodells betrachten wir $\arg(R_{s,c}) \approx 0$, das heißt es muss gelten

$$k_{fx} = \frac{\pi m}{d}, \quad m \in \mathbb{N}$$

also

$$n_e = \sqrt{n_f^2 - \frac{m\lambda}{2d}}$$

Der entsprechende Neigungswinkel ϑ ist dann gegeben durch

$$\vartheta = \arctan \frac{k_{xf}}{k_z} = \arctan \frac{m\lambda}{2d\sqrt{n_f^2 - \frac{m\lambda}{2d}}}$$

Für $m = 1, 2, 3$ ergeben sich somit die Werte

$$n_e^1 = \sqrt{n_f^2 - \frac{\lambda}{2d}} \approx 1.52426 \rightarrow \vartheta_1 = 2.9716^\circ$$

$$n_e^2 = \sqrt{n_f^2 - \frac{\lambda}{d}} \approx 1.49808 \rightarrow \vartheta_2 = 6.0301^\circ$$

$$n_e^3 = \sqrt{n_f^2 - \frac{3\lambda}{2d}} \approx 1.47144 \rightarrow \vartheta_3 = 9.1641^\circ$$