Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

4. Juli 2008

Aufgabe 01

a) Betrachten das um den Winkel ϑ gedrehte Koordinatensystem $\vec{e}_x', \vec{e}_y'$. Dann ist die Basistransformationsmatrix (von der alten zur neuen Basis) gegeben durch

$$R = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Die Jones-Matrix für einen Polarisationsfilter im neuen Basissystem ist per Konstruktion gegeben durch

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Jones-Matrix im alten Basissystem (Labor-Basissystem) gemäß

$$T_\vartheta = R^{-1} T_0 R = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

b) **Existenz der Lösung:** Durch Verwendung zweier Polarisationsfilter mit jeweils Durchlassrichtung $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ lässt sich für den Jones-Vektor

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau das gewünschte Ergebnis erzielen, denn nach Durchgang durch T_{ϑ_1} und T_{ϑ_2} (in dieser Reihenfolge!) ergibt sich der Jones-Vektor

$$J' = T_{\vartheta_2} \cdot T_{\vartheta_1} \cdot J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei beträgt das Verhältnis der Amplitude der durchgelassenen zur einfallenden Welle genau die Hälfte bzw. die Intensität genau ein viertel.

Eindeutigkeit der optimalen Lösung: Betrachten zwei Polarisationsfilter $T_{\vartheta_1},\ T_{\vartheta_2}$ so dass gilt

$$T_{\vartheta_2} T_{\vartheta_1} J = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \neq 0$$

das heißt ausgerechnet

$$\begin{pmatrix} \cos^2\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \\ \cos\vartheta_1^2 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei muss $\cos\vartheta_1 \neq 0$ sein, denn sonst wäre $\lambda = 0$. Anderseits muss $\cos\vartheta_2 = 0$ sein, denn sonst müsse gelten

1. Komponente: $\rightarrow\ \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 = -\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2$

$\rightarrow$ 2. Komponente: $\rightarrow\ \cos\vartheta_1 \left(\sin^2\vartheta_2 \sin\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_2 \sin\vartheta_1\right) = 0 \stackrel{!}{=} \lambda \neq 0$ Widerspruch!

Somit ist $\sin^2\vartheta_2 = 1$ bzw. $\vartheta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ und es folgt durch die 2. Komponente

$$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_1 = 2\sin 2\vartheta_1 = \lambda$$

Die maximale Effektivität wird genau für $\sin 2\vartheta_1 = \pm 1$ erreicht, das heißt $\vartheta_1 = \pm\frac{\pi}{4}$. Doch alle vier Lösungen ergeben genau die gleiche Effektivität bzw. sind äquivalent. Somit war die oben erwähnte Lösung die optimalste. $\square$

Aufgabe 02

Suchen eine lineare Abbildung $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ so dass gilt:

$$TJ = a\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = a_J \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \ , \ a_J \in \mathbb{C} \ , \ \forall\ J \in \mathbb{C}^2$$

Wählen also o.B.d.A die Standardbasis e_1, e_2 und setzen

$$Te_1 := \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \ , \ Te_2 := \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

wobei die λ_j erstmal beliebig sind, und setzen linear fort. Somit muss T die Gestalt

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -i\lambda_1 & -i\lambda_2 \end{pmatrix}$$

haben. Tatsächlich, ist

$$TJ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -i\lambda_1 & -i\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \end{pmatrix} = \left(\lambda_1 J^1 + \lambda_2 J^2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Zu untersuchen bliebe jetzt der Wertebereich von (λ_1, λ_2), insbesondere hinsichtlich der Energieerhaltung bzw. der Realisierung durch elementare Einzelelemente. Betrachten die Transfermatrix

$$L_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ , \ T_{\pi/4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jeweils eines $\lambda/4$-Plättchens und eines Polarisationsfilters in Richtung $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Dann ergibt deren Verkettung genau

$$L_{\lambda/4} \cdot T_{\pi/4} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & -i \end{pmatrix}}_{T} \ , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Dabei sind die Eigenwerte von T genau 0 und $\frac{i}{2}$, das heißt Intensitätsverluste schwanken zwischen 1 und $1 - \left|\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$.

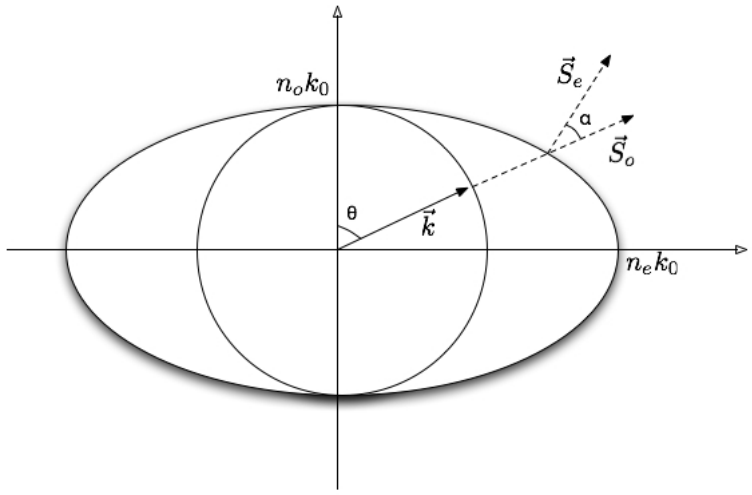
Aufgabe 03

Betrachten die den Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^3$ beschreibenden Normalenflächen eines Einachsigen Kristalls

$$\text{Ordentlich: } k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k_0^2 n_o^2$$

$$\text{Außerordentlich: } \frac{k_1^2 + k_2^2}{n_e^2 k_0^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2 k_0^2} = 1$$

wobei die z-Achse genau die optische Achse ist. Zu erkennen ist: beide Gebilde sind rotationssymmetrisch um die z-Achse, das heißt es genügt den Zusammenhang zwischen k_2 und k_3 für $k_1 = 0$ zu untersuchen. Die beiden Schnittkurven der Flächen mit $k_1 = 0$ sind unten illustriert



woraus zu erkennen ist: Der Offset α zwischen den beiden Ausbreitungsrichtungen (Poynting-Vektoren) $\vec{S}_o, \vec{S}_e$ der ordentlichen und außergewöhnlichen Welle entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\vec{n}_o, \vec{n}_e$ auf den jeweiligen Lösungsflächen. Setzen $a := n_e k_0$ und $b := n_o k_0$, dann sind diese jeweils beschrieben durch:

Ordentlich: $\|k\| = b \;\rightarrow\; \vec{n}_o = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

Außerordentlich: $\dfrac{k_1^2}{a^2} + \dfrac{k_3^2}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \vec{n}_e \sim \operatorname{grad}\left(\dfrac{k_1^2}{a^2} + \dfrac{k_3^2}{b^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2k_1}{a^2} \\ \frac{2k_3}{b^2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\sin\vartheta}{a} \\ \frac{\cos\vartheta}{b} \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \vec{n}_e = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{a^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{b^2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sin\vartheta}{a} \\ \frac{\cos\vartheta}{b} \end{pmatrix}$

Der Winkel α ergibt sich dann gemäß:

$$\cos\alpha = \langle \vec{n}_e, \vec{n}_o \rangle = \frac{a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}} =: f(\vartheta)$$

Suchen nun ϑ so dass α maximal wird. Äquivalent dazu: $\cos\alpha$ soll minimiert werden. Die Winkel ϑ für die $\cos\vartheta = 0 \vee \sin\vartheta = 0$ sind dabei offensichtlich ausgeschlossen. Schreiben also:

$$0 \overset{!}{=} \partial_\vartheta f(\vartheta_0) \;\rightsquigarrow\; \left[\left(b^3 - 2b^2a + ba^2\right)\cdot\sin^2\vartheta + \left(-a^3 + 2a^2b - ab^2\right)\cdot\cos^2\vartheta\right]\cdot\cos\vartheta\sin\vartheta \overset{!}{=} 0$$

und erhalten so

$$\tan\vartheta = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{n_e}{n_0}}$$