

Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

28. Juni 2008

Aufgabe 01

Berechnen zuerst das Spektrum der Linsentransmissionsfunktion:

$$T_L(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} t_L(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{k}{2f} x^2 - i k_x x} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{k}{2f} y^2 - i k_y y} dy \stackrel{*}{=} \frac{f}{i 2\pi k} e^{i \frac{f}{2k} (k_x^2 + k_y^2)}$$

$$(*) : \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + i\beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad \beta \in \mathbb{C}$$

Durch Beleuchtung der Linse mit einer ebenen Welle $u_l^-(x, y) = 1$ ergibt sich das Spektrum $U_l^+(k_x, k_y)$ des Feldes $u_l^+(x, y)$ unmittelbar nach der Linse als

$$U_l^+(k_x, k_y) = \frac{f}{i 2\pi k} e^{i \frac{f}{2k} (k_x^2 + k_y^2)}$$

Die Übertragungsfunktion des freien Raumes ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(k_x, k_y, z) = e^{ikz} \cdot e^{-\frac{iz}{2k} (k_x^2 + k_y^2)}$$

so dass sich das Spektrum $U_o^-(k_x, k_y)$ des Feldes $u_o^-(x, y)$ unmittelbar vor dem Objekt ergibt als

$$U_o^-(k_x, k_y) = U_l^+(k_x, k_y) \cdot \mathcal{H}(k_x, k_y, f-d) = \frac{f}{i 2\pi k} e^{i \frac{f}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} \cdot e^{-\frac{i(f-d)}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} \cdot e^{ik(f-d)} = \frac{f}{i 2\pi k} e^{i \frac{d}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} \cdot e^{ik(f-d)}$$

Sei $T_o(k_x, k_y)$ das Spektrum der Transmissionsfunktion $t_o(x, y)$ des Objektes. Dann ergibt sich das Spektrum $U_o^+(k_x, k_y)$ des Feldes $u_o^+(x, y)$ unmittelbar nach dem Objekt als die Faltung

$$\begin{aligned} U_o^+(k_x, k_y) &= [U_o^- * T_o](k_x, k_y) = \int_{\mathbb{R}^2} U_o^-(k_x - k'_x, k_y - k'_y) \cdot T_o(k'_x, k'_y) dk'_x dk'_y \\ &= \frac{f}{i 2\pi k} \cdot e^{ik(f-d)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \frac{d}{2k} ((k_x - k'_x)^2 + (k_y - k'_y)^2)} \cdot T_o(k'_x, k'_y) dk'_x dk'_y \end{aligned}$$

Weiter, ergibt sich das Spektrum $U_f(k_x, k_y)$ des Feldes $u_f(x, y)$ in der Brennebene der Linse als

$$\begin{aligned} U_f(k_x, k_y) &= U_o^+(k_x, k_y) \cdot \mathcal{H}(k_x, k_y, d) = \frac{f}{i 2\pi k} \cdot e^{ik(f-d)} \cdot e^{ikd} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \frac{d}{2k} ((k_x - k'_x)^2 + (k_y - k'_y)^2)} \cdot e^{-i \frac{d}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} \cdot T_o(k'_x, k'_y) dk'_x dk'_y \\ &= \frac{f}{i 2\pi k} \cdot e^{ikf} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \frac{d}{2k} (k'^2_x + k'^2_y - 2k_x k'_x - 2k_y k'_y)} \cdot T_o(k'_x, k'_y) dk'_x dk'_y \end{aligned}$$

(Propagation im homogenen Raum). Schließlich, ergibt sich das Feld $u_f(x, y)$ durch die entsprechende Rücktransformation

$$\begin{aligned}
u_f(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} [U_f(k_x, k_y)] (x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} U_f(k_x, k_y) \cdot e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \\
&= \frac{f e^{i k f}}{i 2 \pi k} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \frac{d}{2k} (k_x'^2 + k_y'^2)} \cdot T_o(k'_x, k'_y) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} e^{i k_x \left(x - \frac{d k'_x}{k}\right) + i k_y \left(y - \frac{d k'_y}{k}\right)} dk_x dk_y}_{(2\pi)^2 \delta\left(x - \frac{d k'_x}{k}\right) \cdot \delta\left(y - \frac{d k'_y}{k}\right)} dk'_x dk'_y \\
&= \frac{2\pi f e^{i k f}}{i k} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \frac{d}{2k} (k_x'^2 + k_y'^2)} \cdot T_o(k'_x, k'_y) \cdot \delta\left(x - \frac{d k'_x}{k}\right) \cdot \delta\left(y - \frac{d k'_y}{k}\right) dk'_x dk'_y \\
&\stackrel{\eta_i := \frac{d k'_i}{k}}{=} \frac{2\pi k f e^{i k f}}{i d^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \frac{k}{2d} (\eta_x^2 + \eta_y^2)} \cdot T_o\left(\frac{k \eta_x}{d}, \frac{k \eta_y}{d}\right) \cdot \delta(x - \eta_x) \cdot \delta(y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y \\
&= \frac{2\pi k f}{i d^2} e^{i k f} \cdot e^{i \frac{k}{2d} (x^2 + y^2)} \cdot T_o\left(\frac{k x}{d}, \frac{k y}{d}\right)
\end{aligned}$$

Zu erkennen ist: Mit wachsendem Abstand d (Annähern des Objekts an die Linse) ergibt sich eine *höhere Auflösung* des Bildes, das heißt das abgebildete Bild wird vergrößert (*zoom in*). Parallel wird jedoch auch die Intensität mit $o(d^{-4})$ schwächer.

Spezialfall

Das Spektrum von t_o ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
T_o(k_x, k_y) &= \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi f_0 x)) \right] (k_x, k_y) = \frac{\delta(y)}{4} \cdot \mathcal{F} [2 + e^{i 2\pi f_0 x} + e^{-i 2\pi f_0 x}] (k_x) \\
&= \frac{\delta(y)}{4} \cdot [2\delta(k_x) + \delta(k_x - 2\pi f_0) + \delta(k_x + 2\pi f_0)]
\end{aligned}$$

Somit ist die Intensitätsverteilung in der Brennebene gegeben durch

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \frac{\pi^4 f^2}{\lambda^2 d^4} \cdot \delta^2(y) \cdot \left[2\delta\left(\frac{2\pi x}{\lambda d}\right) + \delta\left(\frac{2\pi x}{\lambda d} - 2\pi f_0\right) + \delta\left(\frac{2\pi x}{\lambda d} + 2\pi f_0\right) \right]^2 \\
&\cong \frac{\pi^4 f^2}{\lambda^2 d^4} \cdot \delta^2(y) \cdot [2\delta(x) + \delta(x - \lambda d f_0) + \delta(x + \lambda d f_0)]^2
\end{aligned}$$

Zu erkennen ist: die einzelnen Beugungsordnungen treten im Abstand $\lambda d f_0 = 6.33 \text{ mm}$ auf.

Endliche Apertur

Bei endlicher Apertur würden in obiger Herleitung die Integrationsgebiete endlich sein, was einer Spektralfunktion T_o des Objekts mit beschränktem Träger entspricht. Anders gesagt: die *hohen Ortsfrequenzen* werden durch die beschränkte Apertur des Systems *herausgefiltert* so dass das Beugungsbild, das ja im Endeffekt des Spektrums der Transmissionsfunktion entspricht, genauso von beschränkter Größe ist.

Aufgabe 02

- a) Die Transmissionsfunktionen t_s, t_p, t_z einer sphärischen Linse, eines Prismas und einer zylindrischen Linse (gekrümmt entlang der y -Achse) sind jeweils gegeben durch

$$t_s(x, y) = e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \quad , \quad t_p(x, y) = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta \cdot y} \quad , \quad t_z(x, y) = e^{-i\frac{k}{2f}y^2}$$

wobei f die jeweilige Brennweite der Linse und ϑ der Ablenkungswinkel des Prismas ist. Unter der Forderung dass alle 3 Bauteile koaxial stehen, das heißt deren *Koordinatenursprünge* zusammenfallen, ergibt sich

$$e^{-i\pi(a^2x^2+(by+c)^2)} = e^{-i\pi[a^2(x^2+y^2)+(b^2-a^2)y^2+2bcy+c^2]} \stackrel{!}{=} e^{-i\frac{k}{2f_s}(x^2+y^2)} \cdot e^{-i\frac{k}{2f_z}y^2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta \cdot y}$$

Abzulesen ist:

$$\pi a^2 \stackrel{!}{=} \frac{k}{2f_s} \rightarrow f_s = \frac{1}{\lambda a^2}$$

$$\pi(b^2 - a^2) \stackrel{!}{=} \frac{k}{2f_z} \rightarrow f_z = \frac{1}{\lambda(b^2 - a^2)}$$

$$2\pi bc \stackrel{!}{=} \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta \rightarrow \sin \vartheta = bc\lambda$$

Der Parameter $c^2\pi$ kann zum Beispiel durch eine weitere Dicke $d = \frac{\lambda c^2}{2}$ einer der beiden Linsen erlunget werden.

- b) Führen ein neues kartesisches Koordinatensystem (x', y') ein, das um den Winkel ϑ zum ursprünglichen gedreht ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In diesem Koordinatensystem lautet dann die zu erzielende Transmissionsfunktion

$$t'(x', y') = e^{-i\pi d \cdot x(x', y') \cdot y(x', y')} = \exp \left\{ -i\pi d \left[\cos \vartheta \sin \vartheta (x'^2 - y'^2) + x'y' (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \right] \right\}$$

Zu sehen ist: Speziell für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ geht diese über in

$$t'(x', y') = \exp \left\{ -i\frac{\pi d}{2} (x'^2 - y'^2) \right\}$$

Die Kombination zweier Zylinderlinsen mit jeweils den Brennweiten $f_1 = \frac{2}{\lambda d}$ bzw. $f_2 = -\frac{2}{\lambda d}$ gekrümmt in der x' bzw. y' Achse, würde genau diese Transmissionsfunktion ergeben, denn dann wäre

$$t_1(x', y') \cdot t_2(x', y') = e^{-i\frac{k}{2f_1}x'^2} \cdot e^{-i\frac{k}{2f_2}y'^2} = e^{-i\frac{\pi d}{2}(x'^2 - y'^2)}$$

wie gewünscht. $\square$