Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Juni 2008

Aufgabe 01

Annahme: Die Blenden werden mit monochromatischen, ebenen, senkrecht ankommenden, kohärenten Wellen gemäß

$$u_-(x,y,0) \sim 1$$

beleuchtet.

a) Setzen den Koordinatenursprung in das Zentrum der Blende. Das Feld unmittelbar nach der Blende ergibt sich als

$$u_0(x,y) := u_+(x,y,0) = \Theta\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

so dass sich das Spektrum $U_0(k_x,k_y)$ ergibt als

$$U_0(k_x,k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Theta\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot e^{-i(k_x x+k_y y)}\ dx\ dy \overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(k_x\cos\varphi+k_y\sin\varphi)\rho}\rho\ d\varphi\ d\rho$$

Aufgrund von Symmetriegründen ist $U_0(k_x,k_y)=U_0(r_k)$ mit $r_k := \sqrt{k_x^2+k_y^2}$, so dass insbesondere

$$U_0(k_x,k_y) = U_0(r_k) = U_0(k_x = r_k, k_y = 0)$$

ist, also

$$U_0(r_k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^a \rho\ d\rho\int\limits_0^{2\pi} e^{-ir_k\rho\cdot\cos\varphi}\ d\varphi \overset{*}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^a \rho\ d\rho\int\limits_0^{2\pi} e^{ir_k\rho\cdot\cos\varphi}\ d\varphi$$

Unter Kenntnis dass für die Besselfunktionen 1. Art gilt:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i^n}\int\limits_0^{2\pi} e^{iz\cos\varphi}e^{in\varphi}\ d\varphi$$

folgt für obiges Integral

$$U_0(r_k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^a \rho J_0(r_k\rho)\ d\rho$$

Durch die Identität

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right] = x^m J_{m-1}(x)$$

folgt

$$U_0(r_k) = \frac{1}{2\pi r_k^2}\int\limits_0^{r_k a}(r_k\rho)^1 J_0(r_k\rho)\ d(r_k\rho) = \frac{1}{2\pi r_k^2}\int\limits_0^{r_k a}\frac{d}{d(r_k\rho)}\left[(r_k\rho)^1 J_1(r_k\rho)\right]\ d(r_k\rho)$$

$$= \frac{1}{2\pi r_k^2}\left[(r_k a)^1 J_1(r_k a)\right] = \frac{a^2}{2\pi}\frac{J_1(ar_k)}{ar_k}$$

Somit ist das Beugungsbild in Fraunhofernäherung gegeben durch

$$u(x,y,z) = -i\frac{(2\pi)^2}{\lambda z}e^{ikz}e^{i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)} \cdot \underbrace{U_0\left(k\frac{x}{z},k\frac{y}{z}\right)}_{U_0\left(\frac{k}{z}\rho\right)} = -i\frac{a}{\rho}\cdot e^{ikz}e^{i\frac{k}{2z}\rho^2}\cdot J_1\left(\frac{ak}{z}\rho\right) \ , \ \rho := \sqrt{x^2+y^2}$$

b) Das erste Loch befinde sich im Ursprung und das n-te Lochzentrum befinde sich bei $\vec{r}_n = (x+nb,0,0)$. Das Spektrum ergibt sich durch die Rechenregeln für Fouriertransformationen als

$$U_N(k_x,k_y) = \sum_{n=0}^{N-1} U_0(k_x,k_y)e^{ik_xnb} = U_0(k_x,k_y)\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{ik_xb}\right)^n = U_0(k_x,k_y)\cdot\frac{1-e^{ik_xbN}}{1-e^{ik_xb}}$$

$$= U_0(k_x,k_y)e^{ik_x(N-1)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{k_xNb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k_xb}{2}\right)}$$

Somit ergibt sich für das Beugungsfeld in Fraunhofernäherung

$$u_N(x,y,z) = -i\frac{(2\pi)^2}{\lambda z}e^{ikz}e^{i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)}\cdot U_N\left(k\frac{x}{z},k\frac{y}{z}\right) = e^{i\frac{kx}{z}(N-1)}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{kxNb}{2z}\right)}{\sin\left(\frac{kxb}{2z}\right)}}_{\text{Inneres Muster}}\cdot\underbrace{u(x,y,z)}_{\substack{\text{Bild einer}\\\text{einzelnen}\\\text{Lochblende}\\\text{(Einhüllende)}}}$$

c) Beginnen mit dem Anfangsfeld

$$u_0(x) = \exp\left\{2\pi i\left(\frac{x}{a}-\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right)h\right\}\Theta(Na-x)\Theta(x)$$

und dessen Spektrum

$$U_0(k_x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)e^{-ik_xx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{Na}\exp\left\{2\pi i\left(\frac{x}{a}-\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right)h - ik_xx\right\}\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{na}^{(n+1)a}\exp\left\{i\left(\frac{2\pi}{a}-k_x\right)x - 2\pi inh\right\}\ dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi inh}\int_{na}^{(n+1)a}\exp\left\{i\left(\frac{2\pi}{a}-k_x\right)x\right\}\ dx$$

$$k_x \neq \frac{2\pi}{a} \quad : \quad U_0(k_x) = \frac{a}{i2\pi\left(2\pi-ak_x\right)}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi inh}\left[\exp\left\{i\left(\frac{2\pi}{a}-k_x\right)x\right\}\right]_{na}^{(n+1)a}$$

$$= \frac{a\left[\exp\left\{i\left(2\pi-k_xa\right)\right\}-1\right]}{i2\pi(2\pi-ak_x)}\sum_{n=0}^{N-1}e^{in(2\pi-k_xa-2\pi h)} = \frac{a\left[e^{-ik_xa}-1\right]}{i2\pi(2\pi-ak_x)}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}e^{-in(k_xa+2\pi h)}}_{\Omega}$$

Setzen wir $q := \exp\left\{-i(k_xa+2\pi h)\right\}$ so ist

$$\Omega = \sum_{n=0}^{N-1}q^n = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{q^{\frac{N}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left(q^{-\frac{N}{2}}-q^{\frac{N}{2}}\right)}{\left(q^{-\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}\right)} = e^{-i\frac{(N-1)}{2}(k_xa+2\pi h)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}(k_xa+2\pi h)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(k_xa+2\pi h)\right)}$$

also

$$U_0(k_x) = \frac{a\left[e^{-ik_xa}-1\right]}{i2\pi(2\pi-ak_x)}\cdot e^{-i\frac{(N-1)}{2}(k_xa+2\pi h)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}(k_xa+2\pi h)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(k_xa+2\pi h)\right)}$$

Somit ergibt sich das Beugungsfeld in Fraunhofernäherung als

$$u(x,y,z) = -i\frac{2\pi}{\lambda z}e^{ikz} \cdot U\left(k\frac{x}{z}\right) e^{i\frac{k}{2z}x^2}$$

$$= -\frac{a\left[e^{-i\frac{kxa}{z}} - 1\right]}{\lambda\left(2\pi z - akx\right)} \cdot e^{ikz} \cdot e^{i\frac{k}{2z}x^2} \cdot \exp\left\{-\frac{(N-1)}{2z}\left(kxa + 2\pi hz\right)\right\} \cdot \frac{\sin\left[\frac{N}{2z}\left(kxa + 2\pi hz\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2z}\left(kxa + 2\pi hz\right)\right]}$$