Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Juni 2008

Aufgabe 01

Betrachten die Anfangsfeldverteilung

$$u_0(x,y,t) = v_0(x,y,t)e^{-i\omega_0 t}$$

Die Einhüllende $v_0(x,y,t)$ habe die Spektralfunktion

$$V_0(k_x,k_y,\overline{\omega}) = \mathcal{F}\{v_0\}(k_x,k_y,\overline{\omega}), \quad \overline{\omega} = \omega - \omega_0$$

Das Spektrum $V(k_x,k_y,\overline{\omega},z)$ der Einhüllenden $v(x,y,z,\tau)$ des Feldes

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z,\tau)e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

mit der mitgeführten Zeit $\tau = t - \dfrac{z}{v_g}$ ist dann gegeben durch

$$V(k_x,k_y,\overline{\omega},z) = V_0(k_x,k_y,\overline{\omega}) \cdot \mathcal{H}(k_x,k_y,\overline{\omega},z)$$

mit der Übetragungsfunktion des Mediums

$$\mathcal{H}(k_x,k_y,\overline{\omega},z) = \exp\left[i\frac{z}{2}\left(D\overline{\omega}^2 - \frac{k_x^2+k_y^2}{k_0}\right)\right]$$

und der Dispersion $D = \dfrac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\,|_{\omega_0}$ der Gruppengeschwindigkeit. Beim Durchgang durch ein Medium (D_f) der Länge d_f und darauf folgend durch ein Medium (D_c) der Länge d_c ergibt sich somit das Spektrum $V(k_x,k_y,\overline{\omega},d_f+d_c)$ der Einhüllenden $v(x,y,d_f+d_c,\tau)$ als

$$V(k_x,k_y,\overline{\omega},d_f+d_c) = V_0(k_x,k_y,\overline{\omega}) \cdot \mathcal{H}_f(k_x,k_y,\overline{\omega},d_c) \cdot \mathcal{H}_c(k_x,k_y,\overline{\omega},d_f)$$

Betrachten wir ein transversal unendlich ausgedehntes Feld $u_0(x,y,t)$ (bzw. nur die Dispersionseffekte), das heißt $k_x,k_y \to 0$, und fordern wir die Erhaltung des Spektrums, so muss gelten:

$$\mathcal{H}_f(0,0,\overline{\omega},d_c) \cdot \mathcal{H}_c(0,0,\overline{\omega},d_f) = \exp\left[i\frac{d_f}{2} \cdot D_f\overline{\omega}^2\right] \cdot \exp\left[i\frac{d_c}{2} \cdot D_c\overline{\omega}^2\right] \overset{!}{=} 1 \;\rightarrow\; d_c = -d_f \cdot \frac{D_f}{D_c}$$

Aufgabe 02

a) Für die Entwicklung des Spektrums $U(k_x,k_y,\omega,z)$ eines Feldes $u_0(x,y,t)$ in einem Medium mit der Dispersionsrelation $k = k(\omega)$ wurde (unter Fresnelscher Näherung) die Übertragungsfunktion

$$\mathcal{H}_F(k_x,k_y,\omega,z) = \exp[izk(\omega)] \cdot \exp\left(-i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k(\omega)}z\right)$$

durch die Taylorentwicklung

$$k(\omega) \approx k_0 + \frac{1}{v_g}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2v_g}(\omega-\omega_0)^2$$

auf die Form

$$\mathcal{H}_F(k_x, k_y, \overline{\omega}, z) \approx \exp(ik_0 z) \cdot \exp\left[iz\left(\frac{\overline{\omega}}{v_g} + \frac{D}{2}\overline{\omega}^2\right)\right] \cdot \exp\left(-iz\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0}\right)$$

genähert. Zwar verschwindet für $D = 0$ der Einfluss der *Dispersion der Gruppengeschwindigkeit* in oberer Übertragungsfunktion, doch erweist sich dabei plötzlich der Einfluss höherer Terme der Taylorentwicklung als nicht vernachlässigbar, das heißt die quadratische Näherung ist nicht mehr gerechtfertigt.

b) Betrachten das Feld

$$u_0(x, y, t) = v_0(x, y, t)e^{-i\omega_0 t}$$

Die Übetragungsfunktion $\mathcal{H}$ ergibt sich in paraxialer Näherung als

$$\mathcal{H}(k_x, k_y, \omega, z) = \exp[izk(\omega)] \cdot \exp\left[-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k(\omega)}\right]$$

Durch die Näherung $k(\omega) \approx k_0$ im rechten Term, und

$$k(\omega) \approx k_0 + \frac{1}{v_g}\overline{\omega} + \frac{D}{2}\overline{\omega}^2 + \frac{\Gamma}{6}\overline{\omega^3}$$

im linken Term, erhält man

$$\mathcal{H}(k_x, k_y, \omega, z) \approx e^{ik_0 z} \cdot \exp\left[i\frac{z}{2}\left(D\overline{\omega}^2 + \frac{\Gamma}{3}\overline{\omega}^3 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0}\right)\right] \cdot \exp\left[i\frac{z}{v_g}\overline{\omega}\right]$$

Unter Einführung der mitgeführten Zeit $\tau := t - \dfrac{z}{v_g}$ ergibt sich analog zur parabolischen Näherung das Feld als

$$u(x, y, z, t) = \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{V_0(k_x, k_y, \overline{\omega}) \cdot \exp\left[i\frac{z}{2}\left(D\overline{\omega}^2 + \frac{\Gamma}{3}\overline{\omega}^3 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0}\right)\right]}_{V(k_x, k_y, \overline{\omega}, z)} \cdot \exp[i(k_x x + k_y y - \overline{\omega}\tau)]\; dk_x\, dk_y\, d\overline{\omega}}_{v(x,y,z,\tau)}$$

wobei die Einhüllende v_0 das Spektrum

$$V_0(k_x, k_y, \overline{\omega}) \quad , \quad \overline{\omega} = \omega - \omega_0$$

habe:

$$V_0(k_x, k_y, \overline{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x, y, t) \exp[-i(k_x x + k_y y - \overline{\omega} t)]\; dx\, dy\, dt$$

und $V(k_x, k_y, \overline{\omega}, z)$ eben genau das Spektrum der Einhüllenden $v(x, y, z, \tau)$ ist. Differenzieren von $V(k_x, k_y, \overline{\omega}, z)$ ergibt

$$i\frac{\partial}{\partial z}V(k_x, k_y, \overline{\omega}, z) = -\frac{1}{2}\left(D\overline{\omega}^2 + \frac{\Gamma}{3}\overline{\omega}^3 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0}\right)V(k_x, k_y, \overline{\omega}, z)$$

was im Ortsraum impliziert:

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z, \tau) = \left[\frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + i\frac{\Gamma}{6}\frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - \frac{1}{2k_0}\Delta^{(2)}\right]v(x, y, z, \tau)}$$

Speziell sei $D = 0$ und $k_x, k_y \to 0$ (also $\Delta^{(2)}v \to 0$):

$$\frac{\partial}{\partial z}v(z, \tau) = \frac{\Gamma}{6}\frac{\partial^3}{\partial \tau^3}v(z, \tau)$$

c) Ohne explizite Lösung oberer Differentialgleichung ist nur eine qualitative Aussage möglich: Die *Änderungsrate* der Pulsform wächst mit der zeitlichen Änderungsrate, das heißt je kürzer der Puls, desto schneller ändert sich seine Form und desto kürzer wird seine Ausbreitungslänge.
Man kann jedoch, hinsichtlich der Definition des Dispersionsparameters, auch hier eine charakteristischen Ausbreitungslänge gemäß

$$L'_B := \frac{T_0^3}{|\Gamma|}$$

einführen.