Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

6. Juni 2008

Aufgabe 01

Vorbetrachtung

Betrachten den Helmholtz-Operator

$$\mathcal{H} := \left[\Delta + k^2\right]$$

und das innere Dirichlet-Problem

$$\mathcal{H}u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \ \text{ in } \ \Omega \ , \ u(\vec{r}) \mid_{\partial\Omega} = \varphi(\vec{r})$$

Die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ des Operators ist gegeben durch die Bedingungen

$$\mathcal{H}_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \quad , \quad G(\vec{r}, \vec{r}\,') \mid_{\vec{r} \in \partial\Omega} = 0$$

so sass sich die Lösung des inneren Dirichlet-Problems im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ergibt als

$$u(\vec{r}) = \int\limits_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}\,') f(\vec{r}') \ d^3r' + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n'} \cdot \varphi(\vec{r}\,') \ d^2r'$$

Für $\Omega = \mathbb{R}^3$ mit natürlichen Randbedingungen bzw. für $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ ist die Greensche Funktion jeweils gegeben durch

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

und

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{e^{ik\left|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}\,'\right|}}{4\pi \left|\vec{r} - \tilde{\vec{r}}\,'\right|} - \frac{e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \quad , \quad \tilde{\vec{r}}\,' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix}$$

Spezialfall 1

Betrachten das Dirichlet-Problem

$$\mathcal{H}u_1(\vec{r}) = 0 \ \text{ in } \ \Omega := \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \ , \ u_1(\vec{r}) \mid_{z=0} = \delta(x)\delta(y)$$

An der Grenze $\partial\Omega = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{z}{2\pi} \frac{e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2} \cdot \left[\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} - ik\right]$$

Somit ist nach obiger Überlegung die Funktion u_1 gegeben durch

$$u_1(\vec{r}) = \frac{z}{2\pi} \int\limits_{z'=0} \delta(x')\delta(y') \frac{e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2} \cdot \left[\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} - ik\right] \ d^2r' = \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r^2} \cdot \left[\frac{1}{r} - ik\right]$$

Spezialfall 2

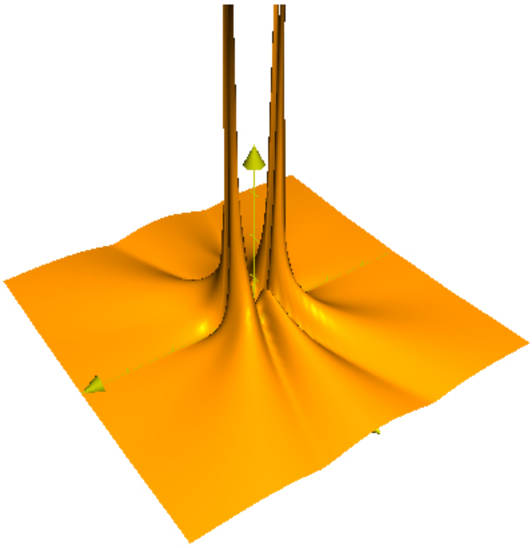
Betrachten nun das Problem

$$\mathcal{H}u(\vec{r}) = 0 \;\text{ in }\; \Omega := \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)\;,\; u(\vec{r})\mid_{z=0} = [\delta(x-a)+\delta(x+a)]\,\delta(y)$$

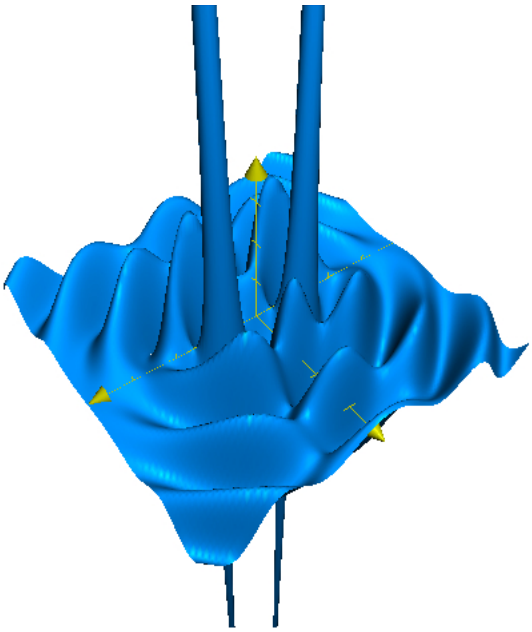
Da $\mathcal{H}$ linear ist und wir hier nur die homogene Differentialgleichung betrachten, gilt das Superpositionsprinzip, die Lösung ist also gegeben durch

$$u(x,y,z) = u_1(x-a,y,z) + u_1(x+a,y,z) = \frac{z}{2\pi}\cdot\frac{e^{ik|\vec{r}-a\vec{e}_x|}}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^2}\cdot\left[\frac{1}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|} - ik\right] + \frac{z}{2\pi}\cdot\frac{e^{ik|\vec{r}+a\vec{e}_x|}}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^2}\cdot\left[\frac{1}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|} - ik\right]$$

Im folgenden wird das Feld $|u(x,0,z)|$



und das Feld $\Re\{u(x,0,z)\}$ dargestellt:



Aufgabe 02

a) Der komplexe Bündelparameter $q(x) = x - iz_r$ ist kurz vor der Linse gegeben durch $q(z) = z - iz_r$. Bei dem Durchgang durch ein optisches Element beschrieben durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ergibt sich der neue Parameter q_2 vom *alten* q_1 als

$$q_1 \overset{M}{\mapsto} q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Unter der Annahme dass es sich um eine dünne Linse handelt, ist deren Matrix M_l bekanntlich gegeben durch

$$M_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

so dass für den Bündelparameter unmittelbar nach der Linse gilt:

$$q_2 = \frac{A(z - iz_r) + B}{C(z - iz_r) + D} = \frac{f(z - iz_r)}{f + iz_r - z} = f\frac{\left(zf - z^2 - z_r^2\right)}{(f - z)^2 + z_r^2} - i\frac{f^2 z_r}{(f - z)^2 + z_r^2}$$

Hinsichtlich des bekannten Zusammenhanges

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{\lambda_n}{\pi w^2(z)} \ , \ \lambda_n = \frac{\pi w_0^2}{z_r}$$

mit der Phasenkrümmung $R(z)$ und der Bündelbreite $w(z)$, suchen wir die Fokusposition $F := z'$ hinter der Linse indem wir fordern dass die dem $q_2 + F$ entsprechende Breite w minimal wird. Diese ist gegeben durch

$$\frac{w_0^2}{z_r w^2} = \Im\left\{\frac{1}{q_2 + F}\right\} = -\frac{\Im\{q_2 + F\}}{|q_2 + F|^2} \quad \rightarrow \quad w^2 = -\frac{w_0^2 \, |q_2 + F|^2}{z_r \Im\{q_2 + F\}}$$

Die Forderung dass w minimal wird, ist äquivalent zur Forderung dass w^2 minimal wird. Es muss also gelten:

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dF}\frac{|q_2 + F|^2}{\Im\{q_2 + F\}} \overset{F \in \mathbb{R}}{=} \frac{d}{dF}\frac{\left[(\Re(q_2) + F)^2 + (\Im(q_2))^2\right]}{\Im(q_2)} = \frac{1}{\Im(q)} \cdot \frac{d}{dF}\left[\Re(q_2) + F\right]^2 = \frac{2}{\Im(q)} \cdot \left[\Re(q_2) + F\right]$$

$$\Rightarrow \quad F = -\Re(q_2) = f\frac{\left(z^2 + z_r^2 - zf\right)}{(f - z)^2 + z_r^2}$$

Alternativ könnte man auch genau dieses F suchen, für dass $\Re\left\{\frac{1}{q_2 + F}\right\} = R(z) \overset{!}{=} 0$ wird:

$$\Re\left\{\frac{1}{q_2 + F}\right\} = \frac{\Re\left\{\overline{q_2 + F}\right\}}{|q_2 + F|^2} \overset{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow \ \Re\{q_2 + F\} = 0 \ \Leftrightarrow \ F = f\frac{\left(z^2 + z_r^2 - zf\right)}{(f - z)^2 + z_r^2}$$

b) Lassen wir $\lambda \rightarrow 0$ gehen, das heißt $z_r \rightarrow \infty$, so geht

$$F \overset{z_r \rightarrow \infty}{\longrightarrow} f$$

über, was genau dem geometrischen Fall entspricht (Definition der Brennweite).

c) Nach der Linse ergibt sich ein *neuer* Gauß-Bündel, mit der Taille der Breite w_0' an der Position $z + F$. Wie wir schon gesehen haben, ist

$$\frac{w_0'}{w_0} = \sqrt{-\frac{|q_2 + F|^2}{z_r \Im\{q_2 + F\}}} \overset{F = -\Re(q_2)}{=} \sqrt{-\frac{|\Re(q_2) + i\Im(q_2) - \Re(q_2)|^2}{z_r \Im(q_2)}} = \sqrt{-\frac{\Im(q_2)}{z_r}} = \frac{|f|}{\sqrt{(f - z)^2 + z_r^2}}$$

und somit

$$\frac{z_r'}{z_r} = \left(\frac{w_0'}{w_0}\right)^2 = \frac{f^2}{(f - z)^2 + z_r^2}$$

Aufgabe 03

Beginnen mit der aus der Vorlesung bekannten Bedingung an einen Resonator

$$z_r = \sqrt{-\frac{d(R_1+d)(R_2+d)(R_1+R_2+d)}{(R_1+R_2+2d)^2}} \approx 74.97\ cm$$

mit dem Spiegelabstand $d = 4\ cm$, der Rayleigh-Länge $z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ und der Taillen-Breite w_0. Somit ist

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{-\frac{d(R_1+d)(R_2+d)(R_1+R_2+d)}{(R_1+R_2+2d)^2}} \approx 0.0389\ cm$$

Die Strahlendivergenz ist ferner gegeben durch

$$\Theta_0 = \frac{\lambda}{w_0 \pi} \approx 0.0297^\circ$$