Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

30. Mai 2008

Aufgabe 01

Da u_0 d-periodisch ist, ist sie in eine Fourierreihe entwickelbar gemäß

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(n) e^{i\frac{2\pi}{d}n\cdot x} \quad , \quad U_0(n) = \frac{1}{d}\int_0^d u_0(x) e^{-i\frac{2\pi}{d}n\cdot x} dx$$

wobei stets die Dispersionsrelation

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) =: k^2 \ , \ k = \frac{2\pi}{\lambda}, \ k_x = \frac{2\pi}{d}n \rightarrow \ k_z(n) = \sqrt{k^2 - k_x^2(n)} \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

gilt. In paraxialer Näherung ist $U_0(n)$ nur für $k_x(n) << k$ signifikant von Null verschieden, das heißt wir können näherungsweise schreiben

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} \approx k\left(1 - \frac{k_x^2}{2k^2}\right)$$

Somit ist das Feld bei $z > 0$ gegeben durch

$$u(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(n) e^{i(k_x(n)x + k_z(n)z)} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(n) \exp\left\{ i\left(k_x(n)x + k\left(1 - \frac{k_x^2(n)}{2k^2}\right)z\right)\right\}$$

$$= e^{ikz} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(n) \exp\left\{ i\left(k_x(n)x - \frac{k_x^2(n)}{2k}z\right)\right\}$$

Damit $|u(x,z)| = |u(x, z+L_T)|$ das heißt

$$\underbrace{\left|e^{ikz}\right|}_{1} \cdot \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(n) \exp\left\{ i\left(k_x(n)x - \frac{k_x^2(n)}{2k}z\right)\right\}\right| = \underbrace{\left|e^{ik(z+L_T)}\right|}_{1} \cdot \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(n) \exp\left\{ i\left(k_x(n)x - \frac{k_x^2(n)}{2k}(z+L_T)\right)\right\}\right|$$

ist, muss gelten

$$(*) \quad : \quad \frac{L_T}{2\pi} \cdot \frac{k_x^2(n)}{2k} = L_T \frac{n^2 \lambda}{2d^2} \overset{!}{\in} \mathbb{N} \quad \forall \ n$$

Insbesondere für $n = 1$ muss also

$$L_T \frac{\lambda}{2d^2} = m \in \mathbb{N}$$

sein. Ist dies erfüllt, so ist offensichtlich (*) auch allgemein für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Das *kleinste* L_T ergibt sich also für $m = 1$, das heißt

$$\boxed{L_T = \frac{2d^2}{\lambda}}$$

Aufgabe 02

Lemma 1

Betrachten einen beliebigen linearen Operator der Art

$$\mathcal{L} := \sum_k \alpha_k(\vec{r}) \cdot \mathscr{D}_k(\vec{r}) + \sum_l \eta_l(\vec{r})$$

wobei die $\mathscr{D}_k$ reelle, lineare Differentialoperatoren (das heißt für reelle u ist auch $\mathscr{D}_k u$ reell und Ableitungen sind als reelle Ableitungen zu deuten) und die α_k, η_l skalare Funktionen seien. Ist $f(\vec{r}) = u(\vec{r}) + iv(\vec{r}),\ u(\vec{r}), v(\vec{r}) \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $\mathcal{L}f = 0$, so ist $\overline{f} := u - iv$ eine Lösung von $\overline{\mathcal{L}}\ \overline{f} = 0$, mit

$$\overline{\mathcal{L}} := \sum_k \overline{\alpha_k(\vec{r})} \cdot \mathscr{D}_k(\vec{r}) + \sum_l \overline{\eta_l(\vec{r})}$$

Beweis:

$$\overline{\mathcal{L}}\ \overline{f} = \sum_k \overline{\alpha_i} \cdot \mathscr{D}_k \overline{f} + \sum_l \overline{\eta_l} \cdot \overline{f} = \sum_k \overline{\alpha_k} \cdot (\mathscr{D}_k u - i\mathscr{D}_k v) + \sum_l \overline{\eta_l \cdot f} = \sum_k \overline{\alpha_k} \overline{(\mathscr{D}_k u + i\mathscr{D}_k v)} + \overline{\sum_l \eta_l f}$$

$$= \overline{\sum_k \alpha_k \mathscr{D}_k f} + \overline{\sum_l \eta_l f} = \overline{\sum_k \alpha_k \mathscr{D}_k f + \sum_l \eta_l f} = 0 \quad \square$$

Spezialfall

Betrachten nun den in der Aufgabenstellung definierten Operator

$$\mathcal{L} := i\frac{\partial}{\partial z} + \Delta^{(2)} + \Delta n(x,y)k_0$$

Sei u eine Lösung von $\mathcal{L}u = 0$. Nach Lemma 1 ist dann $\overline{u}$ Lösung von $\overline{\mathcal{L}}\ \overline{u} = 0$. Es gilt also:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial z} + \Delta^{(2)} + \Delta n(x,y)k_0\right] u = 0 = \left[-i\frac{\partial}{\partial z} + \Delta^{(2)} + \Delta n(x,y)k_0\right] \overline{u}$$

Demnach ist

$$i\frac{\partial}{\partial z}|u|^2 = i\frac{\partial}{\partial z}(u\overline{u}) = ui\frac{\partial}{\partial z}\overline{u} + \overline{u}i\frac{\partial}{\partial z}u = u \cdot \left[\Delta^{(2)} + \Delta n(x,y)k_0\right]\overline{u} - \overline{u} \cdot \left[\Delta^{(2)} + \Delta n(x,y)k_0\right] u$$

$$= u\Delta^{(2)}\overline{u} - \overline{u}\Delta^{(2)}u + u\overline{u}\Delta n(x,y)k_0 - u\overline{u}\Delta n(x,y)k_0 = u\Delta^{(2)}\overline{u} - \overline{u}\Delta^{(2)}u$$

Für ein beliebiges z ist dann

$$i\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\mathbb{R}^2\times\{z\}} |u|^2\ dA = \int\limits_{\mathbb{R}^2\times\{z\}} \left[u\Delta^{(2)}\overline{u} - \overline{u}\Delta^{(2)}u\right]\ dA \overset{\text{Green}}{=} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^2\times\{z\}} \left[u\frac{\partial\overline{u}}{\partial n} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\ ds \overset{u,\overline{u}\in L_2}{=} 0$$

das heißt die an einer beliebiges Schnittfläche $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ gesamt-Energie ist unabhängig von z. Somit ist die Energieerhaltung entlang der Propagationsrichtung gesichert. $\square$

Aufgabe 03

Das Spektrum von $u_0(x,y)$ ist gegeben durch

$$U_0(k_x,k_y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} u_0(x,y)e^{-i(k_x x+k_y y)}\ dk_x\ dk_y = \frac{A_0}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} xe^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}-i(k_x x+k_y y)}\ dx\ dy$$

$$= \frac{A_0}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{w_0^2}-ik_y y}dy\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{w_0^2}-ik_x x}dx \overset{*}{=} \frac{|w_0|\,A_0\sqrt{\pi}}{4\pi^2}e^{-\frac{k_y^2 w_0^2}{4}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{w_0^2}-ik_x x}dx$$

$$\overset{**}{=} -i\frac{k_x w_0^4 A_0}{8\pi}\cdot e^{-\frac{\left(k_x^2+k_y^2\right)w_0^2}{4}}$$

Durch die Dispresionsrelation ergibt sich die Forderung

$$\underbrace{k_x^2+k_y^2}_{r_k^2}+k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) =: k^2 \ \rightarrow\ k_z = \sqrt{k^2-r_k^2}$$

Unter paraxialer Näherung ist U_0 nur für $r_k^2 << k^2$ signifikant von 0 verschieden, das heißt wir können schreiben

$$k_z \approx k\left(1-\frac{r_k^2}{2k^2}\right)$$

Somit ergibt sich das Feld für $z>0$ als

$$u(x,y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} U_0(k_x,k_y)e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\ d^2k = -i\frac{w_0^4 A_0}{8\pi}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^2} k_x \exp\left\{-\frac{r_k^2 w_0^2}{4}+i\left[k_x x+k_y y+k\left(1-\frac{r_k^2}{2k^2}\right)z\right]\right\}\ d^2k$$

$$= -i\frac{w_0^4 A_0}{8\pi}\cdot e^{ikz}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^2} k_x\exp\left\{-k_x^2\left[\frac{w_0^2}{4}+\frac{i}{2k}z\right]+ik_x x\right\}\cdot\exp\left\{-k_y^2\left[\frac{w_0^2}{4}+\frac{i}{2k}z\right]+ik_y y\right\}dk_y\ dk_x$$

$$\overset{*}{=} -i\frac{w_0^4 A_0}{4\sqrt{\pi}}\cdot e^{ikz}\cdot\sqrt{\frac{k}{kw_0^2+2iz}}\cdot e^{-\frac{y^2}{w_0^2+i\frac{2}{k}z}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} k_x\exp\left\{-k_x^2\left[\frac{w_0^2}{4}+\frac{i}{2k}z\right]+ik_x x\right\}dk_x \overset{**}{=} \frac{xk^2 w_0^4 A_0}{\left[kw_0^2+2iz\right]^2}\cdot e^{ikz}\cdot e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w_0^2+i\frac{2}{k}z}}$$

Bemerkung: Bekanntes Gaußsches Integral:

$$(*):\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2+i\beta x}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{C},\ \Re(\alpha)>0,\ \beta\in\mathbb{C}$$

Folgerung:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} xe^{-\alpha x^2+i\beta x}\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}} -\frac{1}{2\alpha}\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(-\alpha x^2+i\beta x\right)-i\beta\right]\cdot e^{-\alpha x^2+i\beta x}\ dx$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx}\left(-\alpha x^2+i\beta x\right)\cdot e^{-\alpha x^2+i\beta x}\ dx+\frac{i\beta}{2\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2+i\beta x}\ dx$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\underbrace{\left[e^{-\alpha x^2+i\beta x}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0}+\frac{i\beta}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} = \frac{i\beta}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\quad(**)$$