Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

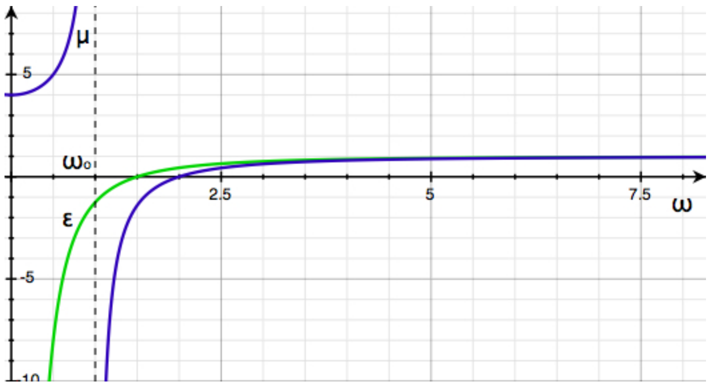
23. Mai 2008

Aufgabe 01

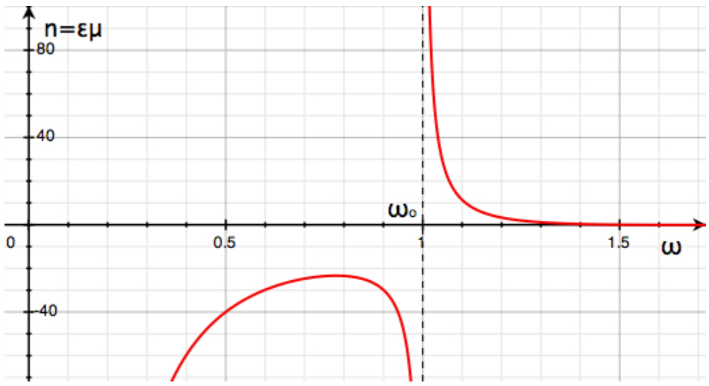
Für $\omega_p = \frac{3}{2}\omega_0$ und $F = 3\omega_0^2$ sind die Permittivität und Permeabilität

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{9\omega_0^2}{4\omega^2}\ ,\ \mu(\omega) = 1 + \frac{3\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

im folgenden qualitativ ($\omega_0 = 1$) dargestellt:



Folgende Graphik soll außerdem das Produkt $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = n^2(\omega)$ qualitativ ($\omega_0 = 1$) darstellen:



Beginnen mit dem Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \vec{E}(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{E}\left(\vec{k},\omega\right)e^{i\vec{k}\,'\vec{r}}\cdot e^{-\vec{k}\,''\vec{r}}\ ,\ \vec{k} = \vec{k}\,' + i\vec{k}\,''$$

$$\vec{H}(\vec{r},\omega) = \vec{H}(\vec{k},\omega(e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

und der daraus resultierenden Dispersionsrelation

$$\mathbf{k}^2 = \left(\vec{k}\,' + i\vec{k}\,''\right)^2 = \vec{k}\,'^2 - \vec{k}\,''^2 + 2i\vec{k}\,'\vec{k}\,'' = \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}_{\in\mathbb{R}} = \frac{1}{4c^2}\left(4\omega^2 - 9\omega_0^2\right)\cdot\left(\frac{4\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

und sehen dass $\vec{k}\,'\cdot\vec{k}\,'' = 0$ sein muss. Es ist also stets

$$\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$$

Für Normalmoden gilt außerdem:

$$\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega) = \omega\mu_0\mu\vec{H}(\vec{k},\omega) \quad , \quad \vec{k}\times\vec{H}(\vec{k},\omega) = -\omega\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}(\vec{k},\omega)$$

Somit folgt für den Poynting-Vektor $\vec{S} := \vec{E}(\vec{k},\omega)\times\vec{H}(\vec{k},\omega)$:

$$\vec{k}\cdot\vec{S} = \vec{k}\cdot\left(\vec{E}(\vec{k},\omega)\times\vec{H}(\vec{k},\omega)\right) = \vec{H}(\vec{k},\omega)\cdot\underbrace{\left(\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega)\right)}_{\omega\mu_0\mu\vec{H}} = \omega\mu_0\mu\left|\vec{H}(\vec{k},\omega)\right|$$

das heißt für $\mu < 0$ ist $\vec{k}\leftrightarrows\vec{S}$ und für $\mu > 0$ ist $\vec{k}\rightrightarrows\vec{S}$.

Unterscheiden die Fälle:

- **Fall:** $0 \le \omega < \omega_0$ bzw $\frac{3}{2}\omega_0 < \omega < 2\omega_0$: Dann ist $\mathbb{R}\ni\mathbf{k}^2 < 0$.
  - (i) Fall $\mathbf{k}' = 0$. Dann ist $|\mathbf{k}\,''| > 0$ und die Lösung stellt eine exponentiell abfallende (bzw. Anwachsende) Welle dar:

    $$\vec{E}(\vec{r},\omega) \sim e^{-\vec{k}''\vec{r}}$$

    Somit ist diese aufgrund ihrer veränderlichen Amplitude keine Normalmode.
  - (ii) Fall $\mathbf{k}'' = 0$. Dann ist $0 > \mathbf{k}^2 = \mathbf{k}'^2 \ge 0$ für kein $\mathbf{k}'$ möglich. Es existieren also keine Lösungen für diesen Fall.
  - (iii) Fall $\mathbf{k}'\perp\mathbf{k}''$ und $\mathbf{k}',\mathbf{k}'' \neq 0$. Dann stellen die Lösungen exponentiell abfallende (bzw. ansteigende) Felder dar:

    $$\vec{E}(\vec{r},\omega) \sim e^{i\vec{k}\,'\vec{r}}\cdot e^{-\vec{k}\,''\vec{r}}$$

    wobei deren Flächen konstanter Phase senkrecht zu deren Flächen konstanter Amplitude stehen (evaneszente Wellen).
- **Fall:** $\omega_0 < \omega < \frac{3}{2}\omega_0$ bzw. $\omega > 2\omega_0$. Dann ist $\mathbb{R}\ni\mathbf{k}^2 > 0$
  - (i) Fall $\mathbf{k}' = 0$. Dann ist $0 < \mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}''^2 \le 0$ für kein $\mathbf{k}''$ Lösbar.
  - (ii) Fall $\mathbf{k}'' = 0$. Dann ist $|\mathbf{k}'| > 0$ und die Lösungen stellen ebene, elliptisch polarisierte, ebene Wellen mit konstanter Amplitude, und somit Normalmoden, dar:

    $$\vec{E}(\vec{r},\omega) \sim e^{i\vec{k}\,'\vec{r}}$$

    Speziell für $\omega > 2\omega_0$ ist $\mu > 0$ also $\vec{k}\rightrightarrows\vec{S}$. Für $\omega_0 < \omega < \frac{3}{2}\omega_0$ ist andernfalls $\mu < 0$ das heißt $\vec{k}\leftrightarrows\vec{S}$.
  - (iii) Fall $\mathbf{k}'\perp\mathbf{k}''$ und $\mathbf{k}',\mathbf{k}'' \neq 0$. Dies kann nur bei hohen Ortsfrequenzen $|\mathbf{k}'|$ vorkommen, da stets gelten muss

    $$\mathbf{k}'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) + \mathbf{k}''^2$$

    Die Lösungen stellen exponentiell abfallende (bzw. ansteigende) Wellen dar:

    $$\vec{E}(\vec{r},\omega) \sim e^{i\vec{k}\,'\vec{r}}\cdot e^{-\vec{k}\,''\vec{r}}$$

    wobei deren Flächen konstanter Phase senkrecht zu deren Flächen konstanter Amplitude stehen (evaneszente Wellen). Somit sind dies auch keine Normalmoden.

Bemerke: Insbesondere geht für $\omega \to \infty$ (also weit weg von Resonanzen) die Dispersionsrelation als Grenzprozess in die vereinfachte Form

$$\mathbf{k}^2 \overset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\omega^2}{c^2}$$

über.

- **Fall:** $\omega = \frac{3}{2}\omega_0$ bzw. $\omega = 2\omega_0$. Dann ist $\mathbf{k}^2 = 0$ und es muss gelten $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}''|$.
  - (i) Fall $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}''| = 0$. Dann stellt die Lösung eine ebene Welle mit unendlich langer Wellenlänge dar (also ein orts-statisches, unendlich ausgebreitetes, homogenes elektrisches Feld).
  - (ii) Fall $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}''| \neq 0$ also $\mathbf{k}' \perp \mathbf{k}''$. Dann stellen die Lösungen exponentiell abfallende (bzw. ansteigende) Wellen dar:

    $$\vec{E}(\vec{r}, \omega) \sim e^{i\vec{k}\,'\vec{r}} \cdot e^{-\vec{k}\,''\vec{r}}$$

    wobei deren Flächen konstanter Phase senkrecht zu deren Flächen konstanter Amplitude stehen (evaneszente Wellen).

Bemerke: Da ω in der Dispersionsrelation nur in geraden Potenzen vorkommt, und demnach nur $|\omega|$ eine Rolle spielt, wurde hier o.B.d.A nur der Fall $\omega \geq 0$ behandelt.

Aufgabe 02

Annahme: Mit Wellenlänge λ sei gemeint die Wellenlänge die eine ebene Welle der unten angenommenen Frequenz ω im Vakuum hätte, also $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.
Das Ortsfrequenzspektrum von $u_0(x, y)$ ist gegeben durch

$$U_0(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} u_0(x, y) e^{-i(xk_x + yk_y)}\ dx\ dy = \frac{A}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{W^2} - i(xk_x+yk_y)}\ dx\ dy$$

$$= \frac{A}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{W^2} - ik_x x}\ dx \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{W^2} - ik_y y}\ dy \overset{*}{=} \frac{A}{4\pi^2} \cdot |W| \sqrt{\pi} e^{-\frac{k_x^2 W^2}{4}} \cdot |W| \sqrt{\pi} e^{-\frac{k_y^2 W^2}{4}} = \frac{AW^2}{4\pi} e^{-W^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{4}}$$

$(*)$: Bekanntes Gaußsches Integral

Bemerke: Mit $r_k^2 := k_x^2 + k_y^2$ und $r^2 := x^2 + y^2$ ergibt sich

$$u_0(x, y) = u_0(r) = Ae^{-\frac{r^2}{W^2}}\ ,\ U_0(k_x, k_y) = U_0(r_k) = \frac{AW^2}{4\pi} e^{-\frac{W^2}{4} r_k^2}$$

Damit in einer bestimmten Ortsfrequenz k_z eine Ausbreitung möglich ist, muss k_z reell sein. Durch die Dispersionsrelation

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

folgt somit die Forderung

$$r_k^2 = k_x^2 + k_y^2 \overset{!}{<} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) =: R_0^2$$

Die zu einer bestimmten Ortsfrequenz entsprechende Energie ist proportional zum *Amplituden-Quadrat*: $W(k_x, k_y) \sim (U_0(k_x, k_y))^2$ so dass die gesamte übertragene Energie einen Anteil von

$$r = \frac{\int\limits_{r_k^2 \le R_0^2} (U_0(r_k))^2 \; dA_k}{\int\limits_{\mathbb{R}^2} (U_0(r_k))^2 \; dA_k} = \frac{\int\limits_{|r_k|<R_0} e^{-W^2 \frac{r_k^2}{2}} \; dA_k}{\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-W^2 \frac{r_k^2}{2}} \; dA_k} = \frac{\int\limits_0^{R_0} \int\limits_0^{2\pi} e^{-W^2 \frac{r_k^2}{2}} r_k \; d\varphi \; dr_k}{\int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} e^{-W^2 \frac{r_k^2}{2}} \; r_k \; d\varphi \; dr_k}$$

$$= \frac{\int\limits_0^{R_0} e^{-\frac{W^2}{2} r_k^2} r_k \; dr_k}{\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{W^2}{2} r_k^2} r_k \; dr_k} = \frac{\left[e^{-\frac{W^2}{2} r_k^2}\right]_0^{R_0}}{\left[e^{-\frac{W^2}{2} r_k^2}\right]_0^{\infty}} = 1 - e^{-\frac{W^2}{2} R_0^2}$$

hat. Fordern wir also einen bestimmten *durchgelassenen* mindest-Anteil r (z.B. $r \overset{!}{\geq} 0.9$) so folgt

$$W^2 \overset{!}{\geq} -\frac{2}{R_0^2} \ln(1-r)$$

Die *Breite* Δr des Strahls sei definiert als die Standardabweichung der Gaussförmigen Kurve $u_0(r)$ und ist somit gegeben durch $\Delta r = \frac{|W|}{\sqrt{2}}$. Unter obiger Voraussetzung muss also gelten

$$\Delta r \overset{!}{\geq} \frac{\sqrt{-\frac{2}{R_0^2} \ln(1-r)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{R_0} \cdot \sqrt{-\ln(1-r)}$$

Mit der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \overset{\varepsilon=1}{=} \frac{2\pi}{R_0}$$

also

$$\boxed{\Delta r \overset{!}{\geq} \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \sqrt{-\ln(1-r)}}$$

Speziell: Für $r = 0.9$ ergibt sich somit

$$\Delta r \overset{!}{\gtrsim} 0.242 \cdot \lambda$$

Aufgabe 03

Annahme: Mit Wellenlänge λ sei gemeint die Wellenlänge die eine ebene Welle der unten angenommenen Frequenz ω im Vakuum hätte, also $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

a) Das Ortsfrequenzspektrum von $u_0(x,y)$ ist gegeben durch

$$U_0(k_x,k_y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}} u_0(x,y)e^{-i(xk_x+yk_y)}\ dx\ dy = \frac{A}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{G}x\right)\right] e^{-ik_xx}\ dx\ \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ik_yy}\ dy}_{2\pi\delta(k_y)}$$

$$= \frac{A\delta(k_y)}{2\pi}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} \left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{G}x\right)\right] e^{-ik_xx}\ dx = \frac{A\delta(k_y)}{4\pi}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}}\left[2+e^{i\frac{2\pi}{G}x}+e^{-i\frac{2\pi}{G}x}\right]e^{-ik_xx}\ dx$$

$$= \frac{A\delta(k_y)}{4\pi}\cdot\left\{2\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ik_xx}\ dx + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i(-\frac{2\pi}{G}+k_x)x}\ dx + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i(\frac{2\pi}{G}+k_x)x}\ dx\right\}$$

$$= A\delta(k_y)\cdot\left\{\delta(k_x)+\frac{1}{2}\delta\left(k_x-\frac{2\pi}{G}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(k_x+\frac{2\pi}{G}\right)\right\}$$

b) Die das Spektrum bildenden Fourierkomponenten sind gegeben durch $k_y = 0$ und

$$k_x \in \left\{0, \frac{2\pi}{G}, -\frac{2\pi}{G}\right\}$$

Analog zur Aufgabe (02) breiten sich nur die Komponenten aus für die gilt

$$k_x^2 + k_y^2 \overset{k_y=0}{=} k_x^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) \overset{\varepsilon=1}{=} \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

Damit sich sämtliche Komponenten in der Luft ausbreiten muss insbesondere gelten

$$\frac{2\pi}{|G|} \leq \frac{2\pi}{\lambda} \ \rightarrow\ |G| \geq \lambda$$

das heißt die Gitterperiode muss mindestens so groß wie die Wellenlänge λ sein.

c) Für sehr kleine Gitterperioden entsprechen die (nicht *durchgelassenen*) Ortsfrequenzen $k_x = \pm\frac{2\pi}{G}$ evaneszenten Feldern und können so für große Abstände $z > 0$ vernachlässigt werden. Das durchgelassene Spektrum besteht dann effektiv nur aus der Ortsfrequenz

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) \overset{\varepsilon=1}{=} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \ \rightarrow\ k_z \overset{k_z\geq 0}{=} \frac{2\pi}{\lambda}$$

Es handelt sich also um eine, mit konstanter Amplitude, sich in Richtung z ausbreitende, ebene Welle:

$$u(x,y,z) \sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z}$$

d) Allgemein ist die den Komponenten k_x, k_y entsprechende Ortsfrequenz k_z durch die Dispersionsrelation

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \overset{k_y=0}{=} k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) \overset{\varepsilon=1}{=} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \ \rightarrow\ k_z^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - k_x^2$$

gegeben, also

$$k_x = k_y = 0 \ \rightarrow\ k_z = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k_x = \pm\frac{2\pi}{G},\ k_y = 0 \ \rightarrow\ k_z \overset{k_z\geq 0}{=} \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{G^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{G^2}}$$

wobei wir nur nicht-negative k_z betrachten (Ausbreitung im Halbraum $z > 0$).
Die Feldverteilung im Halbraum z ist somit gegeben durch

$$u(x,y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} U_0(k_x,k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z(k_x,k_y)z)}\ dk_x\ dk_y\ dk_z$$

$$= A \int\limits_{\mathbb{R}^2} \delta(k_y) \cdot \left\{ \delta(k_x) + \frac{1}{2}\delta\left(k_x - \frac{2\pi}{G}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(k_x + \frac{2\pi}{G}\right) \right\} \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z(k_x,k_y)z)}\ dk_y\ dk_x$$

$$= A \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{ \delta(k_x) + \frac{1}{2}\delta\left(k_x - \frac{2\pi}{G}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(k_x + \frac{2\pi}{G}\right) \right\} \cdot e^{i(k_x x + k_z(k_x,0)z)}\ dk_x$$

$$= A \left\{ e^{ik_z(0,0)z} + \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{G}x + ik_z\left(\frac{2\pi}{G},0\right)z} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{2\pi}{G}x + ik_z\left(-\frac{2\pi}{G},0\right)z} \right\}$$

$$= Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} + \frac{A}{2} e^{i\frac{2\pi}{G}x + i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{G^2}}\cdot z} + \frac{A}{2} e^{-i\frac{2\pi}{G}x + i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{G^2}}\cdot z}$$

$$= Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} + A\cos\left(\frac{2\pi}{G}\right) e^{i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{G^2}}\cdot z}$$