Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

17. Mai 2008

Aufgabe 01

Beginnen mit der Darstellung

$$n = n' + in'' \ , \ n^2 = A + iB \ , \ n', n'', A, B \in \mathbb{R}$$
$$\mu = \mu' + i\mu'' \ , \ \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \ , \ \mu', \mu'', \varepsilon', \varepsilon'' \in \mathbb{R}$$

und der Beziehung $n^2 = \varepsilon\mu, \ n'' \geq 0$ und schreiben

$$n^2 = \varepsilon\mu = \underbrace{(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'')}_{A} + i\underbrace{(\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu')}_{B}$$

$$n^2 = A + iB = n'^2 - n''^2 + 2in'n'' \ \rightarrow \ n'^2 - n''^2 = A \ \wedge \ 2n'n'' = B$$

$$\rightarrow \ 4n''^4 + 4n''^2 A - B^2 = 0 \ \rightarrow \ n''^2 = \frac{1}{2}\left[-A \pm \sqrt{A^2 + B^2}\right] \ \xrightarrow{n''^2 \geq 0} \ n''^2 = \frac{1}{2}\left[-A + \sqrt{A^2 + B^2}\right]$$

$$\xrightarrow{n'' \geq 0} \ n'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} - A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\left(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2\right)\left(\mu'^2 + \mu''^2\right)} - (\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'')}$$

$$\rightarrow \ n' = \frac{B}{2n''} = \frac{B}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} - A}} = \frac{\text{sgn}(B)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} + A}$$

$$= \frac{\text{sgn}\left(\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu'\right)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\left(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2\right)\left(\mu'^2 + \mu''^2\right)} + (\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'')}$$

Im Grenzfall $B \rightarrow 0$ ergibt sich

$$n' = \pm\frac{1 + \text{sgn}(A)}{2} \cdot \sqrt{|A|} \ , \ n'' = \frac{1 - \text{sgn}(A)}{2} \cdot \sqrt{|A|}$$

Aufgabe 02

Annahme: $0 \leq \gamma << \omega_0$.

a) Anders aufgeschrieben ist

$$\chi(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} + i\frac{f\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Im Grenzfall $\gamma \to 0$ ist

$$\Re\chi(\omega) \xrightarrow{\gamma\to 0} \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2} \ , \ \Im\chi(\omega) \xrightarrow{\gamma\to 0} \begin{cases} \pm\infty & : \omega = \pm\omega_0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

b) Betrachten das (uneigentliche) Integral

$$\Omega(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\chi(z)}{(z-\omega)}\ dz = \frac{f\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{z}{\left[\left(\omega_0^2-z^2\right)^2+\gamma^2 z^2\right](z-\omega)}}_{h(z)}\ dz$$

und gehen über in die komplexe Zahlenebene. Betrachten die Kurve $C = C(R) = C_1(R) \cup C_2(R),\ R > 0$ mit

$$C_1(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-R,R]\} \ , \ C_2(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R,\ \Im z > 0\}$$

wobei wir setzen

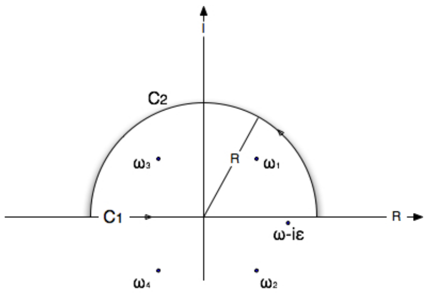
$$h_\varepsilon := \frac{z}{\left[\left(\omega_0^2-z^2\right)^2+\gamma^2 z^2\right](z-(\omega-i\varepsilon))} \ \Rightarrow \ h(z) \overset{z\neq\omega_0}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} h(z)$$

Die Funktion $h_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann umgeschrieben werden in

$$h_\varepsilon(z) = \frac{z}{(z-(\omega-i\varepsilon))\prod_{k=1}^{4}(z-\omega_k)}$$

$$\omega_1 = T + \frac{i\gamma}{2} \ , \ \omega_2 = T - \frac{i\gamma}{2} \ , \ \omega_3 = -T + \frac{i\gamma}{2} \ , \ \omega_4 = -T - \frac{i\gamma}{2} \ , \ T = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \in \mathbb{R}$$

was durch eine einfache Probe bestätigt werden kann. Dabei sind $\omega - i\varepsilon, \omega_1, .., \omega_4$ genau die Polstellen von h_ε in $\mathbb{C}$.



Es gilt:

$$\sup_{z\in C_2} |h_\varepsilon(z)| = \sup_{z\in C_2} \left| \frac{z}{(z-(\omega-i\varepsilon))\prod_{k=1}^{4}(z-\omega_k)} \right| = \sup_{z\in C_2} \frac{\overbrace{|z|}^{R}}{|z^5 + O(z^4)|} = \frac{LR}{R^5} = \frac{L}{R^4}$$

für genügend großes R und geeignetes $L > 0$. Somit ist

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_2(R)} h_\varepsilon(z)\ dz \right| \le \lim_{R\to\infty} \int_{C_2(R)} |h_\varepsilon(z)|\ dz \le \lim_{R\to\infty} \frac{L}{R^4} \underbrace{\int_{C_2(R)} h_\varepsilon(z)\ dz}_{\pi R} = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi L}{R^3} = 0$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(z)\ dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1(R)} h_\varepsilon(z)\ dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} h_\varepsilon(z)\ dz - \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{C_2(R)} h_\varepsilon(z)\ dz}_{0}$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{\Im z>0}(h_\varepsilon, z) = 2\pi i \lim_{z\to\omega_1}(z-\omega_1)h_\varepsilon(z) + \lim_{z\to\omega_3} 2\pi i(z-\omega_3)h_\varepsilon(z)$$

$$= \frac{2\pi i\omega_1}{(\omega_1-(\omega-i\varepsilon))\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{4}(\omega_1-\omega_k)} + \frac{2\pi i\omega_3}{(\omega_3-(\omega-i\varepsilon))\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq 3}}^{4}(\omega_3-\omega_k)}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{2\pi i\omega_1}{(\omega_1-\omega)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{4}(\omega_1-\omega_k)} + \frac{2\pi i\omega_3}{(\omega_3-\omega)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq 3}}^{4}(\omega_3-\omega_k)} = \frac{\pi}{2\gamma T}\left[\frac{1}{T+\frac{i\gamma}{2}-\omega} - \frac{1}{-T+\frac{i\gamma}{2}-\omega}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\gamma\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right)} \quad \Rightarrow \quad \Omega(\omega) = \frac{f\gamma}{\pi}\int_{\mathbb{R}} h(z)\ dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\gamma}{\pi}\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(z)\ dz = \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}$$

Für $\gamma \to 0$ ist somit:

$$\Re\chi(\omega) \xrightarrow{\gamma\to 0} \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2} \xleftarrow{\gamma\to 0} \Omega(\omega)$$

das heißt der Realteil von χ ergibt sich korrekterweise aus dem Imaginärteil.

Aufgabe 03

Betrachten die stationäre monochromatische ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ ,\ \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

der Frequenz

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}\ ,\ \lambda = 8\cdot 10^{-10}\ m$$

wobei o.B.d.A $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ rein reell seien. Der momentane Poynting-Vektor ergibt sich demnach als

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \Re\vec{E}(\vec{r},t)\times\Re\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E}_0\times\vec{H}_0\right\} + \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E}_0\times\vec{H}_0\right\}\cdot\cos(2\omega t) + \frac{1}{2}\underbrace{\Im\left\{\vec{E}_0^*\times\vec{H}_0^*\right\}}_{0}\cdot\sin(2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{E}_0\times\vec{H}_0\right\}\cdot[1+\cos(2\omega t)]$$

Dann ergibt sich bei einer Messzeit T_m ein kumulativer gemessener Energiefluss von

$$\Phi = 2\alpha\int_0^{T_m}\vec{S}\cdot\vec{n}\ dt = \underbrace{\alpha\cos\vartheta\cdot\left|\vec{E}_0\right|\cdot\left|\vec{H}_0\right|}_{\Phi_0}\cdot\int_0^{T_m}[1+\cos(2\omega t)]\ dt = \Phi_0\left[T_m + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T_m)\right]$$

wobei α, ϑ den Messaufbau beschreibende Konstanten sind. Verlangt man dass die durch die Schwingung des Feldes bedingten Energieflussvariationen, einen maximalen Einflussanteil von $r = 0.01$ haben, so muss gelten

$$\frac{\frac{1}{2\omega}}{T_m} = \frac{1}{2\omega T_m} \overset{!}{<} r \quad \Rightarrow \quad T_m > \frac{1}{2\omega r} = \frac{\lambda}{4\pi c r} = \frac{1}{4\pi}\cdot 10^{-16}\ s$$