Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

9. Mai 2008

Aufgabe 01

Nach dem Doppelresonanzmodell ist die elektrische Suszeptibilitätsfunktion $\chi(\omega)$ vom Glas gegeben durch

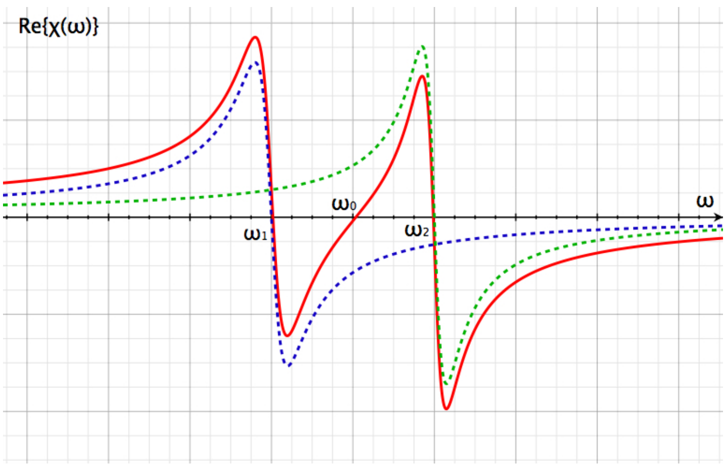
$$\chi(\omega) = \frac{f_1}{(\omega_1^2 - \omega^2) - ig_1\omega} + \frac{f_2}{(\omega_2^2 - \omega^2) - ig_2\omega} \ , \ f_1, f_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$$

wobei ω_1, ω_2 jeweils die Resonanzfrequenzen im Infraroten und Ultravioletten Bereich sind. Anders aufgeschrieben:

$$\chi(\omega) = \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j \left[(\omega_j^2 - \omega^2) + ig_j\omega \right]}{\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)^2 + g_j^2\omega^2} = \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)^2 + g_j^2\omega^2} + i \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j g_j \omega}{\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)^2 + g_j^2\omega^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2\right)}{\omega^4 + \omega_j^4 - 2\omega^2 \left(\omega_j^2 - \frac{g_j^2}{2}\right)} + i \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j g_j \omega}{\left(\omega_j - \omega\right)^2 \left(\omega_j + \omega\right)^2 + g_j^2\omega^2}$$

Der Realteil $\Re\{\chi(\omega)\}$ wird unten für $f_1 = f_2,\ g_1 : g_2 \sim 4:3$ qualitativ illustriert.



wobei die blaue bzw. grüne Kurve jeweils dem Anteil der Resonanzen um ω_1 und ω_2 entspricht. Zu erkennen ist die *normale* Dispersion im sichtbaren Bereich (ω_1, ω_2). Analog folgt auch die Darstellung des entsprechenden Imaginärteils:

wobei zu sehen ist, dass im *sichtbaren* Bereich annähernd keine Absorption auftritt, das heißt $\chi(\omega) \approx \Re\{\chi(\omega)\}$. Für diese Problemstellung kann angenommen werden dass $\omega_j^2 >> \frac{g_j^2}{2}$ ist, so dass im sichtbaren Bereich gilt

$$\Re\{\chi(\omega)\} \approx \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)}{\omega^4 + \omega_j^4 - 2\omega^2\omega_j^2} = \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j\left(\omega_j^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega_j^2\right)^2} = \sum_{j=1}^{2} \frac{f_j}{\left(\omega^2 - \omega_j^2\right)}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \;\rightarrow\; \chi(\lambda) \approx \Re\{\chi(\lambda)\} \approx \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\frac{f_j \lambda_j^2}{4\pi^2 c^2}}_{\mathcal{U}_j} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda_j^2 - \lambda^2}$$

wobei $\mathcal{U}_j$ wiederum das Material (bzw. seine Resonanzstellen) beschreibende Faktoren sind.

Aufgabe 02

Beginnen mit

$$P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \;,\; E(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

machen den Ansatz $\tilde{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ und bekommen so durch die Differentialgleichung im Frequenzraum

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + g\frac{d}{dt}\right] P(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[-\omega^2 + ig\omega\right] \tilde{P}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \varepsilon_0 \omega_p^2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\rightarrow\; \left[-\omega^2 + ig\omega\right] \tilde{P}(\omega) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tilde{E}(\omega) \;\rightarrow\; \tilde{P}(\omega) = \varepsilon_0 \cdot \underbrace{\frac{\omega_p^2}{-\omega^2 + ig\omega}}_{\chi(\omega)} \cdot \tilde{E}(\omega)$$

$$\rightarrow\; \chi(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + g^2} + i\frac{\omega_p^2 g}{\omega^3 + g^2\omega}$$

$$\rightarrow\; \text{Relative Permittivität: } \varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = \underbrace{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + g^2}}_{\varepsilon'(\omega)} + i \underbrace{\frac{\omega_p^2 g}{\omega^3 + g^2\omega}}_{\varepsilon''(\omega)}$$

$$\text{Für } \omega > \sqrt{\omega_p^2 - g^2}\text{:}\;\; \varepsilon'(\omega) = \Re\varepsilon(\omega) > \frac{\omega_p^2 + g^2 - \omega_p^2}{\omega^2 + g^2} = \frac{g^2}{\omega^2 + g^2} > 0$$

Für $\omega > \sqrt{\omega_p^2 - g^2}$ hat also die relative Permittivität für Metalle einen positiven Realteil, was prinzipiell bei Gläsern der Fall ist. Ferner ist dann wegen $\omega_p^2 >> g$ auch

$$\varepsilon''(\omega) < \frac{\omega_p^2 g}{\sqrt{\omega_p^2 - g^2}\left(\omega_p^2 - g^2 + g^2\right)} = \frac{g}{\sqrt{\omega_p^2 - g^2}} \approx 0$$

das heißt es findet so gut wie keine Absorption statt.

Aufgabe 03

Rechnen in Kugelkoordinaten $(1, \vartheta, \varphi)$. Das Raumwinkelelement $d\Omega$ ist bei der Integration über die Kugeloberfläche gegeben durch $d\Omega = \sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi$ bzw. für φ-invariante Integranten durch $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta \; d\vartheta$. Ist $\vartheta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen Dipolachse und Feld, so ist die Energie des Dipols im Feld gegeben durch

$$U_d = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\vartheta$$

Somit ergibt sich zum einen

$$\int_0^\pi \exp\left(-\frac{U_d}{kT}\right) \; d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\sin\vartheta \; d\vartheta = -\frac{2\pi kT}{pE}\int_0^\pi \frac{d}{d\vartheta}\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right) \; d\vartheta$$

$$= -\frac{2\pi kT}{pE}\left[\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\right]_0^\pi = \frac{2\pi kT}{pE}\left[e^{\frac{pE}{kT}} - e^{-\frac{pE}{kT}}\right] = \frac{4\pi kT}{pE}\sinh\left(\frac{pE}{kT}\right)$$

und zum anderen

$$\int_0^\pi \exp\left(-\frac{U_d}{kT}\right) p\cos\vartheta \; d\Omega = 2\pi p\int_0^\pi \exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\sin\vartheta \; d\vartheta = -\frac{2\pi pkT}{pE}\int_0^\pi \cos\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right) \; d\vartheta$$

$$= -\frac{2\pi pkT}{pE}\left[\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta + \int\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\sin\vartheta \; d\vartheta\right]_0^\pi = -\frac{2\pi pkT}{pE}\left[\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta - \frac{kT}{pE}\exp\left(\frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{4\pi pkT}{pE}\left[\cosh\left(\frac{pE}{kT}\right) - \frac{kT}{pE}\sinh\left(\frac{pE}{kT}\right)\right]$$

Demnach ist die Polarisation des Materials gegeben durch

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\left[p\coth\left(\frac{pE}{kT}\right) - \frac{kT}{E}\right]\cdot\hat{\mathbf{E}}$$

Der Zusammenhang $p = p(E)$ sieht qualitativ $\left(\frac{p}{kT} = 1\right)$ wie folgt aus: