Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

27. Juli 2008

Aufgabe 01

Beginnen mit der Differentialgleichung

$$\operatorname{grad} n(\vec{r}) = \frac{d}{ds}\left[n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right]$$

setzen für paraxiale Strahlen $ds \sim dz$ und betrachten wegen Symmetriegrünen das ganze nur in der YZ Ebene. Also ist $n(\vec{r}) = n(y)$, $\vec{r}(s) \approx \vec{r}(z)$ und somit:

$$\operatorname{grad} n(\vec{r}) \approx \frac{\partial}{\partial y} n_0\sqrt{1-\alpha^2y^2}\cdot\vec{e}_y = -\frac{n_0\alpha^2 y}{\sqrt{1-\alpha^2y^2}}\cdot\vec{e}_y = -n_0\alpha^2 y\cdot\left[1+\frac{\alpha^2y^2}{2}+o\left(y^4\right)\right]\cdot\vec{e}_y = -n_0\alpha^2 y\vec{e}_y + o\left(y^3\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left[n(y)\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s)\end{pmatrix}\right] \approx \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} n(y)\dfrac{dy(z)}{dz} \\ n(y)\end{pmatrix} = n(y)\frac{d^2y}{dz^2}\vec{e}_y$$

$$\to\ y'' = -\frac{\alpha^2 y + o\left(y^3\right)}{\sqrt{1-\alpha^2y^2}} = -\alpha^2 y\left[1+\frac{\alpha^2y^2}{2}+o\left(y^4\right)\right] + o\left(o^3\right)\left[1+\frac{\alpha^2y^2}{2}+o\left(y^4\right)\right] = -\alpha^2 y + o\left(o^3\right)$$

Für paraxiale Strahlen also:

$$y'' = -\alpha^2 y \ \to\ y = A\cos(\alpha z) + B\sin(\alpha z) \quad , \quad y'(z) = -A\alpha\sin(\alpha z) + B\alpha\cos(\alpha z)$$

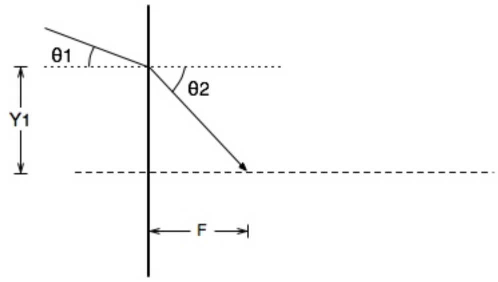
Paralleler Strahl: $y'(0) = B\alpha \overset{!}{=} 0 \ \to\ B = 0 \ \to\ y(z) = y_0\cos(\alpha z) \ \to\ y(d) = y_0\cos(\alpha d) =: y_1$

Steigung am anderen Ende: $y'(d) = -y_0\alpha\sin(\alpha d) =: -\tan\vartheta_1$

Mit Hilfe des Snelliousschen Brechungsgesetzes

$$\sin(\vartheta_1)n_0 = \sin(\vartheta_2)$$

erhalten wir so an der Grenze $z = d$ den Ausgangswinkel ϑ_2.



Für paraxiale Strahlen ($y_0 \approx 0$) ist $\sin\vartheta_1 \approx \tan\vartheta_1$ und $\sin\vartheta_2 \approx \tan\vartheta_2$. Somit ergibt sich der Abstand F des Schnittpunktes des Strahles zur Symmetrieachse (*Fokusierungspunkt*):

$$F = \frac{y_1}{\tan\vartheta_2} \approx \frac{y_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{y_1}{n_0 \sin\vartheta_1} \approx \frac{y_0\cos(\alpha d)}{n_0\tan\vartheta_1} = \frac{\cos(\alpha d)}{n_0\alpha\sin(\alpha d)}$$

Der Abstand $\overline{AH}$ ergibt sich aus analogen geometrischen Überlegungen:

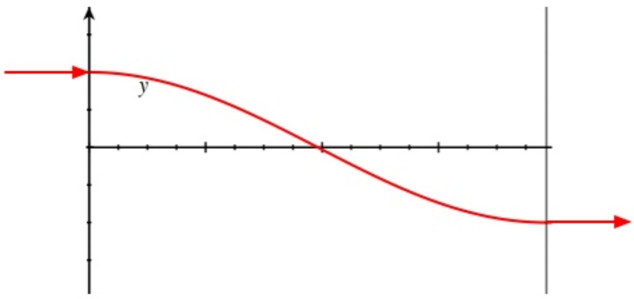
$$\overline{AH} = \frac{y_0 - y_1}{\tan\vartheta_2} = \frac{y_0(1-\cos(\alpha d))}{\tan\vartheta_2} \approx \frac{y_0(1-\cos(\alpha d))}{\sin\vartheta_2} = \frac{y_0(1-\cos(\alpha d))}{n_0\sin\vartheta_1} \approx \frac{y_0(1-\cos(\alpha d))}{n_0\tan\vartheta_1}$$

$$= \frac{(1-\cos(\alpha d))}{n_0\alpha\sin(\alpha d)} = \frac{\tan(\alpha d/2)}{n_0\alpha}$$

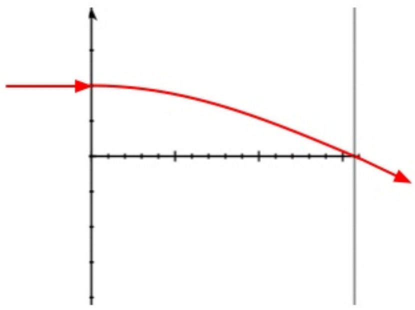
Definieren wir die Brennweite als den Abstand zwischen Hauptebene und Fokusierungspunkt, so ergibt sich

$$f = F + \overline{AH} \approx \frac{\cos(\alpha d)}{n_0\alpha\sin(\alpha d)} + \frac{(1-\cos(\alpha d))}{n_0\alpha\sin(\alpha d)} = \frac{1}{n_0\alpha\sin(\alpha d)}$$

Für $d = \dfrac{\pi}{\alpha}$ verläuft der Strahl wie folgt:



Analog für $d = \dfrac{\pi}{2\alpha}$:



Aufgabe 02

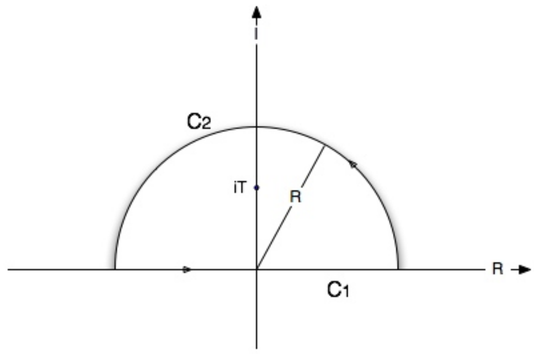
Die Responsefunktion $R(T)$ ist gegeben durch

$$R(t) = \frac{\varepsilon_0 f}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega^2-\omega_0^2) - ig\omega}\, d\omega = \frac{\varepsilon_0 f}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{\left(\omega - \frac{ig}{2}\right)^2 + T}}_{=:f(\omega)}\, d\omega \ , \ T := \frac{g^2}{4} - \omega_0^2$$

Fall: $\omega_0 = 0$. Dann ist $\chi(0) \notin \mathbb{R}$ und somit für uns nicht relevant. Betrachten also nur den Fall $\omega_0 \neq 0$, o.B.d.A $\omega_0 > 0$.
Fall: $g = 0$. Dann ist $\chi(\omega_0) \notin \mathbb{R}$ und somit für uns nicht relevant. Betrachten also nur den Fall $g \neq 0$.

Betrachten die Kurve $C = C_1 \cup C_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wobei

$$C_0 := (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}\ ,\ C_1 := \{x + iy \mid x \in [-R, R]\ ,\ y = 0\} \quad ,\quad C_2 : |z| = R\ ,\ \Im(z) > 0$$



Sei $t \leq 0$. Es gilt auf C_2 für genügend große R:

$$\sup_{\substack{|z|=R \\ \Im(z)>0}} |f(z)| = \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im(z)>0}} \left| \frac{e^{-izt}}{\left(z - \frac{ig}{2}\right)^2 + T} \right| = \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im(z)>0}} \frac{\overbrace{e^{t\Im(z)}}^{\leq 1}}{\underbrace{\left| \left(z - \frac{ig}{2}\right)^2 + T \right|}_{\to R^2}} \leq \frac{L}{R^2} \text{ für geeignetes } L > 0$$

$$\to \left| \int_{C_2} f(z)\ dz \right| \leq \int_{C_2} |f_z|\ \ dz \leq \frac{L}{R^2} \cdot \underbrace{\int_{C_2} dz}_{\leq \pi R} \leq \frac{\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Fall: $T > 0$. Dann folgt durch direktes Vergleichen $\sqrt{T} > \frac{|g|}{2}$. Es ist außerdem

$$f(z) = \frac{e^{-izt}}{\left[z - i\left(\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)\right] \cdot \left[z - i\left(-\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)\right]}$$

Somit ist die einzige, von C gegebenfalls umschlossene Polstelle genau $z_1 = i\left(\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)$. Sei dann $R > \sqrt{T} + \frac{|g|}{2}$
Mit dem Residuensatz weis man

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{\substack{|z|<R \\ \Im z>0}} \operatorname{Res}(f, z) = 2\pi i \lim_{z\to z_1} (z - z_1) \cdot f(z) = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \frac{(z - z_1)}{(z - z_1)\left[z - i\left(-\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)\right]} \cdot e^{-itz} = \frac{\pi}{\sqrt{T}} \cdot e^{\left(\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)t}$$

Lassen wir nun $R \to \infty$ gehen, bekommen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\ d\omega = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\ dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\ dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\ dz}_{0} = \int_{C_0} f(z)\ dz = \frac{\pi}{\sqrt{T}} \cdot e^{\left(\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)t}$$

Wäre andernfalls $t > 0$ so würde man C_2 durch den entsprechenden unteren Halbkreis C_2' ersetzen, so dass wieder gilt: $\lim_{R\to\infty} \int_{C_2'} f(z)\ dz = 0$. Die einzige im Integrationsweg $C' = C_1 \cup C_2'$ liegende Polstelle wäre dann genau $z_2 = i\left(-\sqrt{T} + \frac{g}{2}\right)$

und somit, unter Beachtung des Vorzeichenwechsels (aufgrund des anderen Umlaufsinns)

$$\int\limits_{C'} f(z)\ dz = -2\pi i \sum_{\substack{|z|<R \\ \Im z<0}} \operatorname{Res}(f,z) = -2\pi i \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot f(z) = \frac{\pi}{\sqrt{T}}\cdot e^{\left(-\sqrt{T}+\frac{g}{2}\right)t}$$

und somit allgemein für $T \geq 0$:

$$\boxed{R(t) = \frac{\varepsilon_0 f}{2\sqrt{T}}\cdot e^{\frac{g}{2}t-|t|\sqrt{T}}}$$

Fall: $T<0$. Dann ist

$$f(z) = \frac{e^{-izt}}{\left[z-\left(i\frac{g}{2}-\sqrt{|T|}\right)\right]\cdot\left[z-\left(i\frac{g}{2}+\sqrt{|T|}\right)\right]}$$

Ist $g>0$ so sind beide Polstellen $z_{1,2} = i\frac{g}{2}\pm\sqrt{|T|}$ an der oberen Halbebene $\Im z>0$ enthalten.
Sei erstmal $t<0$. Dann verschwindet das Integral über C_2. Also:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C} f(z)\ dz = \int\limits_{C_0} f(z)\ dz = 2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot f(z) + 2\pi i \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot f(z)$$

$$= \frac{i\pi}{\sqrt{|T|}}e^{\frac{g}{2}t}\left[e^{-it\sqrt{|T|}}-e^{it\sqrt{|T|}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{|T|}}\sin\left(t\sqrt{|T|}\right)e^{\frac{gt}{2}}$$

Für $t>0$ würden wir analog zu vorhin über den unteren Halbkreis C_2' integrieren. Da jetzt aber keinerlei Polstellen in C' enthalten sind, ergibt sich

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C'} f(z)\ dz = \int\limits_{C_0} f(z)\ dz = 0$$

Also für $T<0$ und $g>0$ allgemein

$$\boxed{R(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0 f}{\sqrt{|T|}}\sin\left(t\sqrt{|T|}\right)e^{\frac{g}{2}t} & : t<0 \\ & \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}}$$

Ist andernfalls $g<0$ so befinden sich beide Polstellen z_1, z_2 in der unteren Halbebene $\Im z<0$. Für $t<0$ (Integration über C) würde also das gesamte Integral verschwinden, d.h $R(t<0)=0$, wobei für $t>0$ (Integration über C') sich ergeben würde (beachte umgekehrten Umlaufsinn):

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C'} f(z)\ dz = \int\limits_{C_0} f(z)\ dz = -2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot f(z) - 2\pi i \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot f(z) = -\frac{2\pi}{\sqrt{|T|}}\sin\left(t\sqrt{|T|}\right)e^{\frac{gt}{2}}$$

Somit allgemein für $T<0$ und $g<0$:

$$\boxed{R(t) = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon_0 f}{\sqrt{|T|}}\sin\left(t\sqrt{|T|}\right)e^{\frac{g}{2}t} & : t>0 \\ & \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}}$$

Durch direktes einsetzen in

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(t)\cdot e^{i\omega t}\ dt$$

bestätigt sich die Korrektheit der Lösung in allen 3 Fällen.