Grundkonzepte der Optik

FSU Jena - SS 08

Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

27. Juli 2008

Aufgabe 01

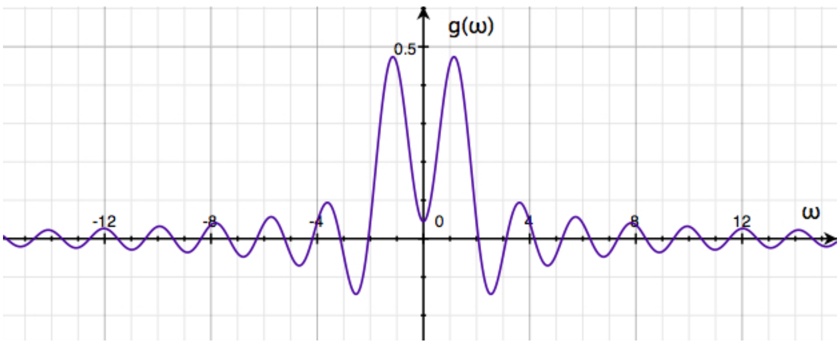
Das Spektrum des Pulses ergibt sich als die Spektralfunktion $g(\omega)$ von E bzw. als deren Träger, also:

$$\omega \neq \pm\omega_0 \ : \ g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E(t)\cdot e^{-i\omega t}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\cos(\omega_0 t)\cdot e^{-i\omega t}\ dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-a}^{a}\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)\cdot e^{-i\omega t}\ dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-a}^{a}\left(e^{i(\omega_0-\omega)t}+e^{-i(\omega_0+\omega t)}\right)\ dt = \frac{1}{i4\pi}\left[\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}}{(\omega_0-\omega)}-\frac{e^{-i(\omega_0+\omega)t}}{(\omega_0+\omega)}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left[(\omega_0-\omega)a\right]}{(\omega_0-\omega)}+\frac{\sin\left[(\omega_0+\omega)a\right]}{(\omega_0+\omega)}\right]$$

$$g(\pm\omega_0) = \lim_{\omega\to\pm\omega_0} g(\omega)$$

Für $\omega_0 = 1,\ a = 3$ sieht dieses wie folgt aus:



Aufgabe 02

Sei o.B.d.A $T > 0$.
Die Fouriertransformierte von u ist definiert als

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-i\omega t}\ dt = \frac{u_0 T^2}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{T^2 + t^2}\ dt$$

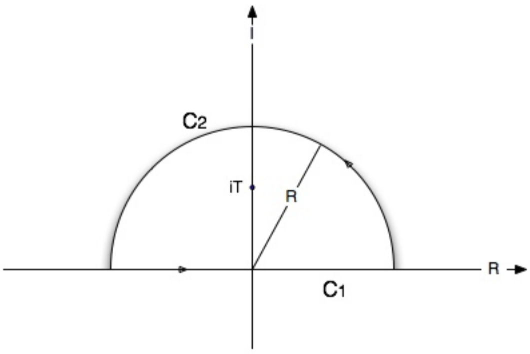
Für genügend große bzw. kleine t ist

$$0 \leq \Bigg| \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{T^2 + t^2}}_{=:f(t)} \Bigg| \leq \frac{1}{t^2}$$

so dass wegen dem Majorantenkriterium das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{T^2 + t^2}\ dt$$

existiert. Betrachten die Kurve $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deren Bild aus einem Halbkreis $C_2 : |z| = R\ ,\ \Im(z) > 0$ und dem reellen Intervall $C_1 : [-R, R]$ besteht:



Sei $\omega \leq 0$. Es gilt auf C_2:

$$\sup_{\substack{|z|=R \\ \Im(z)>0}} |f(z)| = \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im(z)>0}} \left| \frac{e^{-i\omega z}}{T^2 + z^2} \right| = \sup_{\substack{|z|=R \\ \Im(z)>0}} \frac{\overbrace{e^{\omega \Im(z)}}^{\leq 1}}{\underbrace{|T^2 + z^2|}_{\geq |z|^2 = R^2}} \leq \frac{1}{R^2}$$

$$\to \left| \int\limits_{C_2} f(z)\ dz \right| \leq \int\limits_{C_2} |f_z|\ \ dz \leq \frac{1}{R^2} \cdot \underbrace{\int\limits_{C_2} dz}_{\pi R} = \frac{\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sei jetzt außerdem $R > T$. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist überall außer in $z = \pm iT$ holomorph. Mit dem Residuensatz weis man

$$\int\limits_{C} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{\substack{|z|<R \\ \Im z>0}} \operatorname{Res}(f, z) = 2\pi i \lim_{z\to iT} (z - iT) \cdot f(z) = 2\pi i \lim_{z\to iT} \frac{(z - iT)}{(z - iT)(z + iT)} \cdot e^{-i\omega z} = \frac{\pi e^{\omega T}}{T}$$

Lassen wir nun $R \to \infty$ gehen, bekommen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\ dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\ dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\ dz}_{0} = \lim_{R\to\infty} \int_{C} f(z)\ dz = \frac{\pi e^{\omega T}}{T}$$

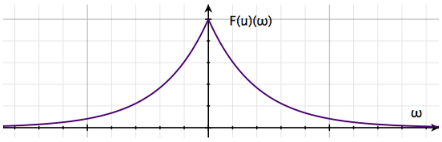
und somit

$$\omega \leq 0 \to\ \mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{u_0 T e^{\omega T}}{2}$$

Jedoch ist die Funktion u gerade. Somit muss auch die Fouriertransformierte gerade sein, also $\mathcal{F}(u)(-\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega)$ bzw.

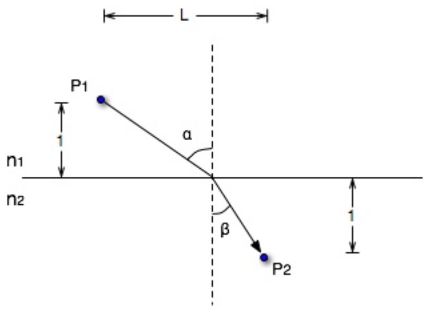
$$\boxed{\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{2} \cdot u_0 T e^{-|\omega| T}}$$

Qualitativ sieht diese für $T = u_0 = 1$ wie folgt aus



Aufgabe 03

Betrachten zwei aneinander grenzende Medien mit den Brechzahlen n_1, n_2 und einen Lichtstrahl der vom Punkt P_1, durch die Grenzschicht, in den Punkt P_2 gelangt. Dabei bildet der Strahl mit der Senkrechten vor und nach der Schicht jeweils die Winkel α und β. Die Positionen der Punkte seien o.B.d.A gegeben wie in folgender Illustration:



Dann gilt:

$$\tan\alpha + \tan\beta = L \quad \to \quad \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{d\beta}{\cos^2\beta} = 0 \quad \to \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$$

Nach dem Fermatschen Prinzip muss der zurückgelegte optische Weg $S = \dfrac{n_1}{\cos\alpha} + \dfrac{n_2}{\cos\beta}$ zwischen den beiden Punkten extremal sein, d.h

$$dS = \frac{n_1 \sin\alpha}{\cos^2\alpha} d\alpha + \frac{n_2 \sin\beta}{\cos^2\beta} d\beta \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{n_1 \sin\alpha \cos^2\beta}{n_2 \cos^2\alpha \sin\beta}$$

Zusammen mit dem vorigen Ergebnis ergibt sich so

$$\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{n_1 \sin\alpha \cos^2\beta}{n_2 \cos^2\alpha \sin\beta}$$

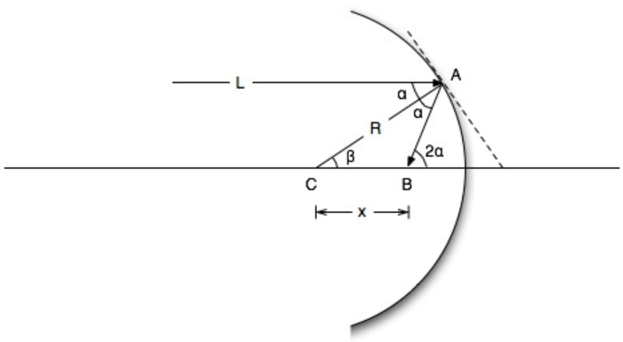
also

$$\boxed{\frac{n_1 \sin\alpha}{n_2 \sin\beta} = 1}$$

$\square$

Aufgabe 04

Betrachten einen konkaven sphärischen Spiegel mit dem Radius R und einen, parallel zur Symmetrieachse verlaufenden, am Punkt A des Spiegels reflektierenden, Lichtstrahl L. Dieser Reflexionspunkt sei gegeben durch den Winkel β unter dem dieser zur Symmetrieachse steht. Der reflektierte Strahl kreuze die Symmetrieachse am Punkt B im Abstand x vom Zentrum C, wie unten illustriert:



Aus dem Bild ist abzulesen:

$$2\alpha = \pi - (\pi - \alpha - \beta) = \alpha + \beta \ \rightarrow \ \beta = \alpha$$

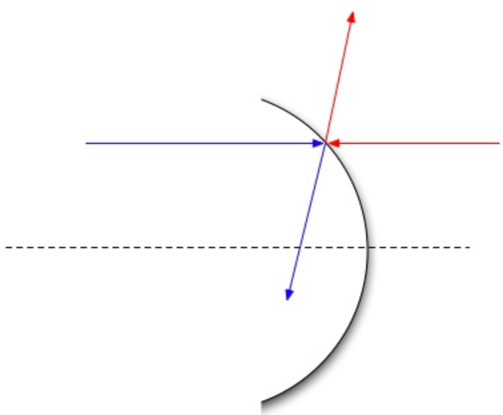
Somit ist $\widehat{CBA}$ gleichschenkliges Dreieck, mit $x = CB = BA$.
Mit dem cos-Satz bekommt man so

$$R^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos(\pi - 2\beta) = 2x^2 \left(1 + \cos\beta\right) \ \rightarrow \ x = \frac{R}{\sqrt{2(1 + \cos\beta)}}$$

Man sieht dass der Spiegel eigentlich keinen richtigen *Brennpunkt* hat, sondern die parallel zur Symmetrieachse einfallenden Strahlen treffen sich mehr oder weniger in einer Umgebung um den Grenz-Brennpunkt. Für kleine β ist insbesondere

$$x \approx \frac{R}{\sqrt{2\left(1 + 1 - \frac{\beta^2}{2}\right)}} = \frac{R}{\sqrt{4 - \beta^2}} \approx \frac{R}{2}$$

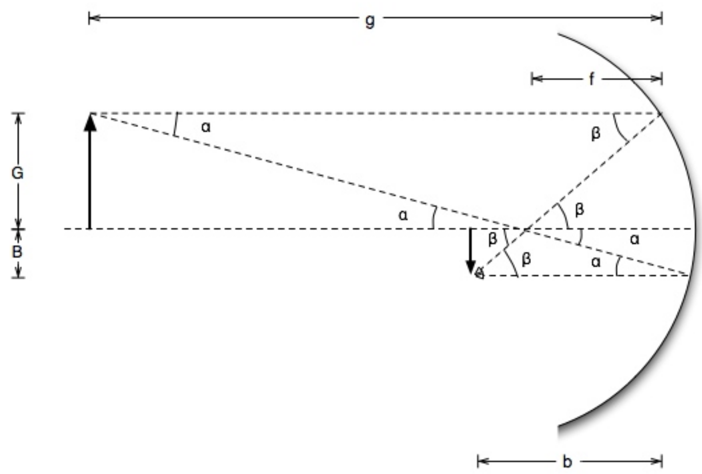
d.h für kleine Winkel ist die Brennweite $f = -\dfrac{R}{2}$.
Bemerke: Betrachtet man von außen (parallel) ankommende Strahlen (Spiegel konvex) so würden die reflektierten Strahlen auf den gleichen Geraden liegen wie die Reflexionen von innen ankommenden Strahlen:



Somit hat der konvexe sphärische Spiegel für paraxiale Strahlen die Brennweite $f = \dfrac{R}{2}$.

Abbildungsgleichung

Betrachten nun ein senkrecht auf der Achse, im Abstand g, stehendes Objekt der Höhe G mit dem entsprechendem Bild der Höhe B im Abstand b.



Zur Verfolgung der Strahlengänge wurde verwendet dass aus dem Brennpunkt kommende Strahlen parallel zur Achse reflektiert werden, und umgekehrt. Aus der Abbildung (ähnliche Dreiecke) ist abzulesen:

- $\frac{G}{g-f} = \frac{B}{f}$
- $\frac{B}{b-f} = \frac{G}{f}$
- $\frac{G}{g} = \frac{B}{b}$ (Vergrößerungsformel)

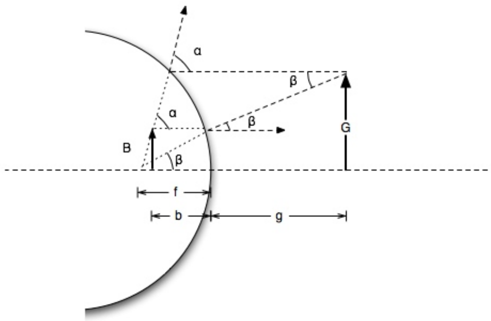
Bemerke: Da wir nur paraxiale Strahlen betrachten, deuten wir alle Punkte auf der Spiegeloberfläche auf der gleichen vertikalen Achse.
Zusammengefasst folgt also die Abbildungsgleichung

$$\frac{g}{b(g-f)} = \frac{gB}{bB(g-f)} = \frac{G}{B(g-f)} = \frac{B}{G(b-f)} = \frac{bB}{gB(b-f)} = \frac{b}{g(b-f)}$$

$$\rightarrow \; g^2(b-f) = b^2(g-f) \; \rightarrow \; f(b^2-g^2) = bg(b-g) \; \rightarrow \; f(b+g) = bg$$

$$\rightarrow \; \frac{1}{f} = \frac{bg}{bgf} = \frac{f(b+g)}{bgf} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

Betrachten wir andernfalls den Spiegel als konvex (d.h Gegenstand außerhalb) so entsteht ein virtuelles Bild innerhalb der Kugelfläche, gemäß



Aus der Abbildung ist abzulesen

- $\dfrac{G}{f+g} = \dfrac{B}{f}$
- $\dfrac{G}{f} = \dfrac{G-B}{b}$

Zusammengefasst also

$$B = \frac{fG}{f+g} \;\to\; \frac{G}{f} = \frac{G - \frac{fG}{f+g}}{b} \;\to\; \frac{1}{f} = \frac{g}{b(f+g)} \;\to\; f(g-b) = bg$$

$$\to\; \frac{1}{f} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g}$$

wobei zu beachten ist, dass f hier nach innen gezählt wurde. Setzt man sein Koordinatensystem so dass $x = 0$ auf dem Spiegel und $g > 0$ ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \ , \ f, b < 0$$