Mathematische Physik
FSU Jena - WS 2009/2010
Aufgabenblatt 02 - Lösungen

Stilianos Louca

November 24, 2009

Aufgabe 01

Aufgabenstellung

Es seien $E_1, .., E_n$ und F Banachräume und

$$f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F \quad , \quad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$$

n-linear und stetig, das heißt

$$\|f\| := \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|f(x_1, .., x_n)\| < \infty$$

Dabei sei auf $E_1 \times \cdots \times E_n$ die Norm

$$\|(x_1, .., x_n)\| := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$$

eingeführt. Zeigen Sie:

1. $\|f(x_1, .., x_n)\| \leq \|f\| \cdot \|x_1\| \cdot .. \cdot \|x_n\| \quad \forall\, x_i \in E_i$
2. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'(x_1, .., x_n)(h_1, .., h_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, .., \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{h_i}, x_{i+1}, .., x_n)$$

3. Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to F \ , \ g(t) := f(x_1(t), .., x_n(t))$$

besitzt die Ableitung

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1(t), .., x_i(t), .., x_n(t))$$

(falls die x_i differenzierbar sind).

Lösung

1. Sei $\mathbf{x} := (x_1, .., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ beliebig (o.B.d.A. $x_i \neq 0 \ \forall\, i$), dazu

$$\mathbf{y} := (y_1, .., y_n) := \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$$

Dann ist $\|\mathbf{y}\| = 1$ und daher $\|f(\mathbf{y})\| \leq \|f\|$ bzw.

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{y})\| \cdot \|x_1\| \cdot .. \cdot \|x_n\| \leq \|f\| \cdot \|x_1\| \cdot .. \cdot \|x_n\|$$

was zu beweisen war.

2. Wegen

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i_1=1}^{n} f(x_1,..,h_{i_1},..,x_n)}_{=:F(\mathbf{x},\mathbf{h})} + \underbrace{\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} f(x_1,..,h_{i_1},..,h_{i_2},..,x_n) + \cdots + f(\mathbf{h})}_{=:r(\mathbf{x},\mathbf{h})}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\|r(\mathbf{x},\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} &\leq \lim_{h\to 0}\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\left\|f\left(x_1,..,\tfrac{h_{i_1}}{\|h\|},..,h_{i_2},..,x_n\right)\right\| + \cdots + \left\|f\left(\tfrac{h_1}{\|h\|},h_2,..,h_n\right)\right\| \\ &\leq \lim_{h\to 0}\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\|f\|\cdot\|x_1\|\cdot..\cdot\frac{\|h_{i_1}\|}{\|h\|}\cdot..\cdot\|h_{i_2}\|\cdot..\cdot\|x\| + \cdots + \|f\|\cdot\frac{\|h_1\|}{\|h\|}\cdot..\cdot\|h_n\| \\ &= 0\end{aligned}$$

besitzt f die Ableitung

$$f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = F(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1,..,h_i,..,x_n)$$

3. Nach Kettenregel gilt

$$g'(t)h = f'(\mathbf{x})\mathbf{x}'(t)h = \sum_{i=1}^{n} f(x_1(t),..,x_i'(t)h,..,x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1(t),..,x_i'(t),..,x_n(t))\cdot h$$

sprich

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1(t),..,x_i'(t),..,x_n(t))$$

□