Mathematische Physik
FSU Jena - WS 2009/2010
Aufgabenblatt 01 - Lösungen

Stilianos Louca

October 21, 2009

Aufgabe 01

Aufgabenstellung

Gegeben sei die KdV-Gleichung

$$\partial_t v = \partial_{xxx} v + 3(\partial_x v)^2 \quad , \quad t, x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass der Ansatz $v(t,x) = w(x+ct)$ auf die Lösung

$$v(t,x) = 2a(1+l)^{-1} \cdot l \quad , \quad l(t,x) := e^{ax+a^3 t} b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

führt.

Lösung

Gehen mit dem Ansatz $v(t,x) = w(x+ct)$ in die KdV-Gl. ein und erhalten

$$c \cdot w^{(1)} = w^{(3)} + 3(w^{(1)})^2$$

bzw.

$$\zeta'' = c\zeta - 3\zeta^2$$

für $\zeta(t) := w^{(1)}(t)$. Multiplizieren mit $2\zeta'$ führt zu

$$\overbrace{\frac{d}{dt}(\zeta')^2}^{2\zeta'\zeta''} = \overbrace{\frac{d}{dt}\int \left(2c\zeta - 6\zeta^2\right)\, d\zeta}^{(2c\zeta - 6\zeta^2)\cdot\zeta'}$$

bzw.

$$(\zeta')^2 = c\zeta^2 - 2\zeta^3 + A \quad , \quad A : \text{const}$$

Durch Trennung der Variablen und der Wahl $A = 0$ erhält man

$$\underbrace{\int \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{c - 2\zeta}}}_{-\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{c-2\zeta}{c}}\right] + \text{const}} = t$$

also

$$\zeta(t) = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\tanh^2\left[B - \frac{\sqrt{c}}{2} t\right] = \frac{2ce^{B-\sqrt{c}t}}{\left(1 + e^{B-\sqrt{c}t}\right)^2}$$

Dementsprechend ergibt sich

$$w(t) = \int \zeta(t)\, dt = \frac{2\sqrt{c}}{1 + e^{B-\sqrt{c}t}} + C \quad , \quad C : \text{const}$$

Speziell für $C = -2\sqrt{c}$ ergibt sich

$$w(t) = -2\sqrt{c} \cdot \frac{e^B e^{-\sqrt{c}t}}{1 + e^B e^{-\sqrt{c}t}} \quad , \quad B \in \mathbb{R}$$

Nach Identifizierung $a := -\sqrt{c},\ b := e^B$ ergibt sich

$$v(t,x) = w(x+ct) = 2a \cdot \frac{be^{a(x+a^2t)}}{1 + be^{a(x+a^2t)}}$$

was zu behaupten war.

$\square$