Mathematische Physik

FSU Jena - WS 2009/2010

Vorlesungsscript

Stilianos Louca

5. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um persönliche Aufzeichnungen und Erläuterungen des Stoffes der im WS 09/10 an der FSU Jena von Prof. B. Carl im Fach *Mathematische Physik* gelehrt wurde. Beweise sind nur teilweise inkludiert.

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst, da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!
Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Einführung

2.1 Die Kordeweg de Vries Gleichung

2.1.1 Historisches zur Solitonentheorie

Die Solitonentheorie besitzt ihren Ursprung in 1834, als John Scott Russel die heutzutage als *Soliton* oder *solitäre Welle* bezeichnete Wellenart entdeckte. 1895 schrieben **K**orteweg & **d**e **V**ries eine nichtlinear Differentialgleichung nieder, die (skalare) KdV-Gleichung

$$\partial_t u = \partial_x^3 u + 6u \cdot \partial_x u \quad , \quad t, x \in \mathbb{R} \tag{2.1.1.1}$$

(kurz: KdV) die auch Russels *Flachwasserwelle* enthält. Von Zabusky & Kruskal wird die KdV Gleichung 1965 in der Plasmaphysik wiederentdeckt. Dabei gaben sie gewissen nicht-linearen Wellenphänomenen den Namen *Solitonen*.

Seither gibt es in der Physik einen Zweig mit dem Namen *Solitonentheorie*. In Mathematical Reviews erschienen im Zusammenhang mit der KdV-Gleichung im Zeitraum 1980-1987 etwa 3800 Arbeiten, im Zeitraum 1988-1992 ca. 3300 Arbeiten!

2.1.2 Eine einfache Lösung der KdV-Gleichung

Setzt man $u =: \partial_x v$ in der KdV (2.1.1.1), so erhält man die *integrierte* KdV-Gleichung

$$\partial_t v = \partial_x^3 v + 3 \cdot (\partial_x v)^2 \quad , \quad t, x \in \mathbb{R} \tag{2.1.2.1}$$

dessen Lösung direkt zur Lösung von (2.1.1.1) führt.
Lösungen für die integrierte KdV Gleichungen gewinnt man z.B. mit dem Wellenansatz $v =: w(x + ct)$. So ist etwa

$$v(t, x) = \frac{2a \cdot l(t, x)}{1 + l(t, x)} \tag{2.1.2.2}$$

mit

$$l(t, x) := e^{ax + a^3 t} \cdot b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Lösung von (2.1.2.1). Durch Differenzieren erhält man schließlich Lösungen für die ursprüngliche KdV Gleichung (2.1.1.1):

$$u(t, x) = \partial_x v(t, x) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\cosh^2 \left[\frac{a}{2}(x + a^2 t) + \delta\right]} \quad , \quad a, \delta \in \mathbb{R} \tag{2.1.2.3}$$

Diese ist für $t = 0$ in Abb. (1) dargestellt.

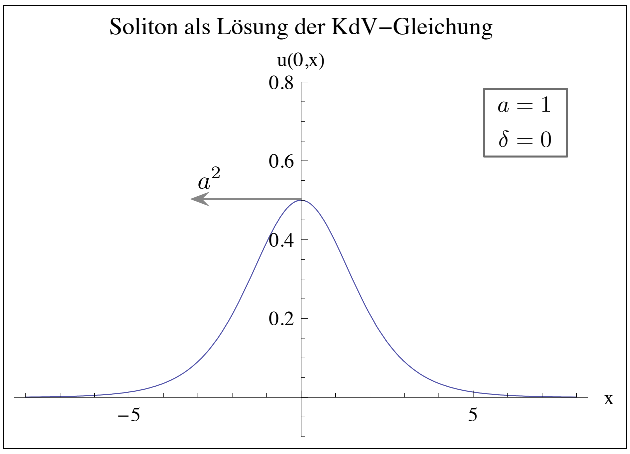

Abbildung 1: Solitonenwelle der Geschwindigkeit a^2 als Lösung der skalaren KdV-Gleichung (2.1.1.1) für Parameter $a = 1,\ \delta = 0$ (vgl. (2.1.2.3)).

2.2 Modell zur Gewinnung neuer Lösungen aus *Keimlösungen*

Im folgenden sei ein Modell illustriert, zur Gewinnung von neuen (bzw. allgemeineren) Lösungen der KdV aus einer *Keimlösung*. Dessen Ausarbeitung wird den wesentlichen Stoff der Vorlesung ausmachen. Dabei kann das Modell auch auf andere ähnliche partielle Differentialgleichungen angewandt werden.

2.2.1 Modellskizze

Schritt 1: Gegeben sei eine *Keimlösung* $v(t,x)$ der skalaren, integrierten KdV

$$\partial_t v = \partial_x^3 v + 3 \cdot (\partial_x v)^2$$

Schritt 2: Man mache den Übergang $v(t,x) \to V(t,x)$ von der skalaren Funktion v zur Familie $(V(t,x))_{t,x\in\mathbb{R}}$ beschränkter, linearer Operatoren auf einem Banachraum E und interpretiere

$$\partial_t V = \partial_x^3 V + 3 \cdot (\partial_x V)^2 \tag{2.2.1.1}$$

als Operatorgleichung. Für geeignete Struktur von V, z.B. analog zu (2.1.2.2), muss stets überprüft werden ob V die Operatorgleichung auch tatsächlich erfüllt!

Schritt 3: Man suche passende Funktionale

$$\tau : \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C} \quad , \quad \tau : V \mapsto \tau(V) =: v$$

auf Operatoridealen $\mathcal{A}(E)$ zur Konstruktion neuer, skalarer Lösungen $v := \tau(V)$ der skalaren KdV. Dabei muss τ spezielle Anforderungen erfüllen um die Struktur der KdV zu erhalten. Es stellt sich heraus, dass Spuren & Determinanten eine bequeme Beschreibung der neuen Lösungen $v = \tau(V)$ liefern.

2.2.2 Illustration des Modells im Matrizenfall

Man betrachte die Lösung (2.1.2.2) der skalaren, integrierten KdV (2.1.2.1)

$$v(t,x) = \frac{2a \cdot l(t,x)}{1 + l(t,x)} \quad , \quad l(t,x) := e^{ax+a^3t} \cdot b \quad , \quad a,b \in \mathbb{R} \tag{2.2.2.1}$$

und mache den Übergang $a \to A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $b \to B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ von den skalaren Parametern a, b zu den Matrizen (Operatoren) $A, B : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Aus der *symmetrischen* Darstellung

$$v = (1+l)^{-1} \cdot (al + la)$$

konstruiere man die Operatorenfamilie

$$V := V(t,x) := (\mathrm{Id} + L)^{-1}(AL + LA) \ : \ \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N \ , \ t,x \in \mathbb{R} \tag{2.2.2.2}$$

wobei

$$L := L(t,x) := e^{xA+tA^3}B$$

und verifiziere dass V tatsächlich die integrierte Operator-KdV

$$\partial_t V = \partial_x^3 V + 3 \cdot (\partial_x V)^2$$

erfüllt (siehe 6.1.1). Schließlich lässt sich zeigen, dass die Spur

$$v := \mathrm{trace}(V) = \mathrm{trace}\left[(\mathrm{Id} + L)^{-1}(AL + LA)\right] \tag{2.2.2.3}$$

wiederum Lösung der skalaren, integrierten KdV (2.1.2.1) ist, falls $\mathrm{rang}(AB + BA) = 1$ und $(1 + L)^{-1}$ existiert. Gegebenfalls besitzt dann v die Darstellung

$$v = \mathrm{trace}(V) = 2 \cdot \frac{\partial_x \det(\mathrm{Id} + L)}{\det(\mathrm{Id} + L)} \tag{2.2.2.4}$$

(siehe 6.2.2).

2.2.3 Beispiel: Lösung von Hirota

Setzt man im obigen Formalismus 2.2.2

$$A := \begin{pmatrix} -k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -k_N \end{pmatrix}$$

und fordert $\operatorname{rang}(AB + BA) \stackrel{!}{=} 1$, sprich

$$AB + BA = -a \otimes c$$

für irgendwelche $a, c \in \mathbb{C}^N$, so ergibt sich für B durch

$$-a_j c_i = (AB + BA)_{ij} = \underbrace{(AB)_{ij}}_{-k_i B_{ij}} + \underbrace{(BA)_{ij}}_{-k_j B_{ij}} = -(k_i + k_j) B_{ij}$$

die Darstellung

$$B = \left(\frac{a_j c_i}{k_i + k_j} \right)_{i,j=1}^N$$

insofern

$$k_i + k_j \neq 0 \quad \forall\, i, j = 1, .., N \tag{2.2.3.1}$$

Mit

$$L := e^{xA + tA^3} B = \begin{pmatrix} e^{-xk_1 - tk_1^3} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-xk_N - tk_N^3} \end{pmatrix} \cdot B = \left(\tfrac{a_j c_i}{k_i + k_j} \cdot e^{-xk_i - tk_i^3} \right)_{i,j=1}^N$$

ist

$$v = 2 \cdot \frac{\partial_x \det(\mathrm{Id} + L)}{\det(\mathrm{Id} + L)}$$

Lösung der skalaren, integrierten KdV (2.1.2.1) bzw.

$$u = \partial_x v = 2 \cdot \partial_x^2 \big[\ln \det(\mathrm{Id} + L) \big]$$

Lösung der skalaren KdV (2.1.1.1) mit $3N$ *freien* Parametern k_i, a_i, c_i [Hirota]. Im Falle

$$0 < k_1 < .. < k_N \ , \ a_i = c_i > 0$$

erhält man die sogenannte *N-Solitonen-Lösung* [Toda].

Problem: Es stellt sich die Frage, wie sich Lösungen für $N \to \infty$ verhalten, bzw. was überhaupt $\det(\mathrm{Id} + L)$ bedeutet, falls $L : E \to E$ beschränkter, linearer Operator auf irgendeinem Banachraum E ist.

3 Matrizen und Operatoren

3.1 Endlich dimensionale Vektorräume

3.1.1 Identifizierung mit dem $\mathbb{C}^N$

Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, sprich es existiere eine endliche Basis $b_1, .., b_n \in E$ so dass jedes $x \in E$ eindeutig durch

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i b_i \quad , \quad x^1, .., x^n \in \mathbb{C}$$

darstellbar ist. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{B} : \mathbb{C}^n \to E \quad , \quad \mathfrak{B}(\underbrace{x^1, .., x^n}_{\in \mathbb{C}^n}) := \sum_{i=1}^{n} x^i b_i \tag{3.1.1.1}$$

ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}^n$ und E. Setzt man

$$\mathbb{C}^{n\times n} := \left\{ M := (M_{ij})_{i,j=1}^n : n \times n \text{ Matrix über } \mathbb{C} \right\}$$

und

$$\mathcal{L}(E) := \{ T : E \to E \text{ linearer Operator} \}$$

so erhält man durch

$$\underbrace{M}_{\in \mathbb{C}^{n\times n}} \mapsto \underbrace{T_M}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)} \quad , \quad T_M \mathbf{x} := \left(\sum_{j=1}^{n} M_{ij} x^j \right)_{i=1}^{n} =: M \cdot \mathbf{x} \quad , \quad M \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

eine eineindeutige Beziehung $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ zwischen den $n \times n$ Matrizen und den Operatoren auf $\mathbb{C}^n$. Ist allgemeiner $T \in \mathcal{L}(E)$ ein linearer Operator auf dem n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum E, so existiert eine (eindeutige) darstellende Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$T b_j = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} b_i \quad , \quad j = 1, .., n$$

und es gilt $T = \mathfrak{B} \circ T_M \circ \mathfrak{B}^{-1}$ (vgl. Abb. (2)).

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathfrak{B}^{-1}"'] & E \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "T_M"] & \mathbb{C}^n \arrow[u, "\mathfrak{B}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Zur Isomorphie endlich-dimensionaler Vektorräume und deren linearer Operatoren.

Beachte dass die Matrix M von der Wahl der Basis $b_1, .., b_n \in E$ abhängt. Ist N die T-darstellende Matrix zur alternativen Basis $\beta_1, .., \beta_n \in E$ und $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so dass

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} b_i \quad , \quad j = 1, .., n$$

so gilt $N = X^{-1} M X$.

Beispiele:

(i) Der Identitätsoperator $\mathrm{Id} : E \to E$ wird stets durch die Identitätsmatrix (δ_{ij}) repräsentiert.

(ii) Jede Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist darstellend zum Operator $T_M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ bzgl. der Standardbasis $\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n$.

Zu jedem linearen Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ existiert eine geeignete Basis $\beta_1, .., \beta_n \in E$, in der die T-repräsentierende Matrix Dreiecksgestalt

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1n} \\ & N_{22} & & N_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & N_{nn} \end{pmatrix}$$

hat. Ist E mit einem Skalarprodukt ausgestattet, so kann dies sogar durch eine orthogonale Basis erfüllt werden! Es kann sogar gezeigt werden, dass für geeignete Basis, N sogar auf Jordan-Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_m \end{pmatrix} \quad , \quad N_i = \begin{pmatrix} \nu_i & 1 & & & 0 \\ & \nu_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \nu_i \end{pmatrix} \quad , \ i = 1, .., m$$

gebracht werden kann!

3.1.2 Spuren auf endlich dimensionalen Vektorräumen

Zu Matrix $M = (M_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt

$$\mathrm{trace}(M) := \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$$

Spur von M. Dabei gilt für $M, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\mathrm{trace}(XM) = \mathrm{trace}(MX) \tag{3.1.2.1}$$

Zu linearem Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ auf dem endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum E mit darstellenden Matrix M, heißt

$$\mathrm{trace}(T) := \mathrm{trace}(M)$$

Spur des Operators T. Dabei ist $\mathrm{trace}(T)$ tatsächlich wohldefiniert, da jegliche andere T-darstellende Matrix N durch $N = X^{-1}MX$ für geeignete $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit M in Beziehung steht und daher

$$\mathrm{trace}(N) = \mathrm{trace}\left(X^{-1}MX\right) \overset{(3.1.2.1)}{=} \mathrm{trace}(M)$$

3.1.3 Determinanten auf endlich dimensionalen Vektorräumen

Zu Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt

$$\det(M) := \sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)}$$

Determinante von M. Dabei erfüllt der lineare Operator $\det : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ die Eigenschaften:

(i) $\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N) = \det(NM)$ für $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(ii) $\det(M) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \exists\ M^{-1}$ für jede $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(iii) Sind M, N darstellende Matrizen des linearen Operators $T : E \to E$, sprich $N = X^{-1}MX$ für irgendeine $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so gilt
$$\det(N) = \det(X^{-1}MX) = \det(X^{-1}XM) = \det(M)$$

Zu linearem Operator $T : E \to E$ auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum E setzt man

$$\det(T) := \det(M)$$

für irgendeine T-darstellende Matrix M.

3.1.4 Eigenwerte

Sei E ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zu Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert* von T, falls

$$\operatorname{kernel}(\lambda \operatorname{Id} - T) \neq \{0\}$$

sprich, falls ein Vektor $0 \neq x \in E$ existiert, so dass $Tx = \lambda x$. Gegebenfalls heißt dann x *Eigenvektor* von T zum Eigenwert λ. Analog heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert* bzw. $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ *Eigenvektor* der Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, falls λ Eigenwert bzw. $\mathbf{x}$ Eigenvektor des erzeugten Operators $T_M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist.

Eigenschaften:

(i) Sei $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine T-darstellende Matrix. Dann ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von T genau dann wenn λ Eigenwert von M ist.

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, genau dann wenn $\det(\lambda \operatorname{Id} - M) = 0$, sprich λ Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$\chi_M \in X[\mathbb{C}] \quad , \quad \chi_M(\lambda) := \det(\lambda \operatorname{Id} - M) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

ist, dessen Koeffizienten durch

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} M_{i_1 i_1} & \dots & M_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i_k i_1} & \dots & M_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

bestimmt sind. Speziell ist $\alpha_1 = -\operatorname{trace}(M)$. Entsprechend ist das *charakteristische Polynom* χ_T von $T \in \mathcal{L}(E)$ definiert als $\chi_T := \chi_M$ für irgendeine T-darstellende Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(iii) Die *algebraische Vielfachheit* $\operatorname{Alg}(\lambda)$ eines Eigenwertes λ ist definiert als die Vielfachheit der Nullstelle λ in χ_T und ist gleich

$$\operatorname{Alg}(\lambda) = \dim \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\operatorname{kernel}(T^k)}_{\substack{\text{wachsend} \\ \text{in } k}}$$

(iv) Für beliebigen Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ mit Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$ (entsprechend algebraischer Vielfachheit gezählt) gilt

$$\operatorname{trace}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

und

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad , \quad \det(\lambda \operatorname{Id} - T) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

3.2 Operatoren auf Banachräumen

3.2.1 Beschränkte, lineare Operatoren

Ein linearer Operator $T : E \to F$ zwischen zwei normierten Räumen E, F heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, C \geq 0 : \forall\, x \in E : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$$

Dabei gilt: $T : E \to F$ ist genau dann beschränkt, wenn T stetig ist und genau dann wenn

$$\inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\| \ \ \forall\, x \in E\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$$

Der Raum

$$\mathcal{L}(E, F) := \{T : E \to F \text{ beschränkt, linear}\}$$

aller beschränkten, linearen Operator von E nach F, ausgestattet mit der *Operatornorm*

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \quad , \quad T \in \mathcal{L}(E, F)$$

ist ein Banachraum falls F ein Banachraum ist. Ist G ein weiterer normierter Raum und $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}(F, G)$, so ist auch $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ mit $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. Der *Nullraum* oder *Kern*

$$\mathcal{N}(T) := \text{kernel}(T) := \{x \in E : Tx = 0\}$$

eines Operators $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ist ein abgeschlossener, linearer Teilraum von E. Dagegen ist der *Bildraum*

$$\mathcal{R}(T) := \text{image}(T) := T(E) := \{Tx : x \in E\}$$

zwar linear, doch im allgemeinen <u>nicht</u> abgeschlossen. Dabei ist T

- injektiv $\Leftrightarrow$ $\text{kernel}(T) = \{0\}$
- surjektiv $\Leftrightarrow$ $\text{image}(T) = F$

3.2.2 Beispiel: l_p-Räume und Diagonaloperatoren

Zu $0 < p < \infty$ sei

$$l_p(\mathbb{K}) := \left\{ z = (z_n) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p < \infty \right\}$$

ausgestattet mit der Norm (bzw. p-Norm falls $0 < p \leq 1$)

$$\|z\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad , \quad z \in l_p$$

bzw.

$$l_\infty(\mathbb{K}) := \{z = (z_n) \subseteq \mathbb{K} : (z_n) \text{ beschränkt}\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|z\|_\infty := \sup\{|z_n| : n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad z \in l_\infty$$

Dann sind $\left[l_p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p \right]$ für $p \geq 1$ Banachräume. Dabei gilt für $0 < p \leq q \leq \infty$ nach (A.3.2) stets

$$l_p \subseteq l_q$$

Für $0 < p \leq 1$ und $\sigma \in l_p$ ist der Operator

$$D_\sigma : l_\infty \to l_1$$

definiert durch

$$D_\sigma(\xi) := (\sigma_n \xi_n)_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \xi \in l_\infty$$

linear & beschränkt, mit Norm

$$\|D_\sigma\| \overset{A.3.2}{\leq} \|\sigma\|_p$$

3.2.3 Definition: Invertierbarer Operator

Ein beschränkter, linearer Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen den normierten Räumen E, F heißt *invertierbar* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ X \in \mathcal{L}(F,E) : XT = \mathrm{Id}_E\ ,\ TX = \mathrm{Id}_F$$

Gegebenfalls ist dann $X =: T^{-1}$ eindeutig bestimmt und heißt *inverser Operator* von T.

3.2.4 Satz von Banach über den inversen Operator

Ein beschränkter, linearer Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F ist invertierbar, genau dann wenn er injektiv & surjektiv ist, sprich

$$\mathrm{kernel}(T) = \{0\} \quad \wedge \quad \mathrm{image}(T) = F$$

Bemerke: Die entscheidende Aussage des Satzes ist, dass die Existenz der inversen Abbildung $T^{-1} : F \to E$ (impliziert durch Injektivität & Surjektivität) auch deren Linearität und Beschränktheit impliziert!

3.2.5 Definition: Injektion, Surjektion

Ein linearer, beschränkter Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F heißt:

- *Injektion* $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{kernel}(T) = \{0\}$ & $\mathrm{image}(T)$ ist abgeschlossen.
- *Surjektion* $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{image}(T) = E$.
- *metrische Injektion* $:\Leftrightarrow$ $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall\ x \in E$.
  Beachte dass jede metrische Injektion auch tatsächlich eine Injektion ist!
- *metrische Surjektion* $:\Leftrightarrow$ $T(B_1^o(0_E)) = B_1^o(0_F)$ sprich die offene Einheitskugel in F ist Bild der offenen Einheitskugel in E.
  Beachte dass jede metrische Surjektion tatsächlich auch eine Surjektion ist!
- *metrischer Isomorphismus* $:\Leftrightarrow$ T ist bijektiv und metrische Injektion (vgl. Satz 3.2.6).

3.2.6 Lemma über metrische Injektionen & Surjektionen

Seien E, F zwei Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E,F)$ invertierbar.

1. Ist T metrische Injektion, so ist es auch T^{-1}.
2. Ist T metrische Surjektion, so ist es auch T^{-1}.
3. T ist genau dann metrische Injektion, wenn er auch metrische Surjektion ist.

Beweise:

1. Für $y \in F$ gilt
$$\left\|T^{-1}y\right\| = \left\|TT^{-1}y\right\| = \|y\|$$
2. Wegen $T(B_1^o(0_E)) = B_1^o(0_F)$ gilt auch umgekehrt
$$T^{-1}(B_1^o(0_F)) = B_1^o(0_E)$$
3. **Richtung "$\Rightarrow$":** Offensichtlich ist $T(B_1^o(0_E)) \subseteq B_1^o(0_F)$. Anderseits ist nach (1) auch
$$T^{-1}(B_1^o(0_F)) \subseteq B_1^o(0_E)$$
bzw.
$$B_1^o(0_F) \subseteq T(B_1^o(0_E))$$

Richtung "$\Leftarrow$": Sei $0 \neq x \in E$. Wegen

$$\|Tx\| \leq \underbrace{\|T\|}_{1} \cdot \|x\| = \|x\|$$

genügt es zu zeigen $\|Tx\| \geq \|x\|$. Angenommen $\|Tx\| < \|x\|$, dann müsse

$$\|x\| = \left\|T^{-1}Tx\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\| < \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|x\|$$

bzw. $\left\|T^{-1}\right\| > 1$ sein, ein Widerspruch zu (2).

□

3.2.7 Die Quotientenabbildung als metrische Surjektion

Zu Banachraum E und abgeschlossenem Teilraum $N \subseteq E$ heißt

$$E/N := \{[x] := x + N : x \in E\}$$

Quotientenraum von E modulo N. Durch den Ansatz

$$\|[x]\| := \inf\{\|z\| : z \in [x]\} = \inf\{\|x + z\| : z \in N\}$$

wird auf E/N eine Norm definiert und $[E/N,\ \|[\cdot]\|]$ wird zu einem Banachraum. Die Abbildung

$$Q_N : E \to E/N \quad , \quad Q_N x := [x]$$

ist eine beschränkte, lineare Abbildung und heißt *Quotientenabbildung*. Wegen

$$\|Q_N x\| = \|[x]\| \leq \|x\|$$

ist $\|Q_N\| \leq 1$ bzw.

$$Q_N(B_1^0(0_E)) \subseteq B_1^o(0_{E/N})$$

Tatsächlich ist Q_N sogar eine metrische Surjektion, denn zu jedem $[x] \in B_1^o(0_{E/N})$ existiert ein $z \in N$ mit $\|x - z\| < 1$ bzw. $(x - z) \in B_1^o(0_E)$ und

$$Q_N(x - z) = Q_N x - Q_N z = [x] - \underbrace{[z]}_{0_{E/N}} = [x]$$

also

$$Q_N(B_1^0(0_E)) \supseteq B_1^o(0_{E/N})$$

Spezialfall: Ist $N = \{0\}$, so ist Q_N Bijektiv und wegen $\|Q_N x\| = \|[x]\| = \|x\|$ sogar metrischer Isomorphismus.

3.2.8 Faktorisierungssatz von Operatoren

Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein beschränkter, linearer Operator zwischen den Banachräumen E, F mit Kern $\mathcal{N}(T)$ und Bild $\mathcal{R}(T)$. Es seien definiert

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{N}(T)} &: E \to E/\mathcal{N}(T) \quad , \quad Q_{\mathcal{N}(T)}x := [x] \\ I_{\mathcal{R}(T)} &: \mathcal{R}(T) \to E \quad , \quad I_{\mathcal{R}(T)}x := x \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Die lineare Abbildung

   $$T_0 : E/\mathcal{N}(T) \to \mathcal{R}(T) \quad , \quad T_0\,[x] := Tx$$

   ist wohldefiniert, bijektiv mit Norm $\|T_0\| = \|T\|$ und erfüllt

   $$T = I_{\mathcal{R}(T)} \circ T_0 \circ Q_{\mathcal{N}(T)} \tag{3.2.8.1}$$

   (vgl. Abb. (3)).

2. Ist T metrische Injektion, so ist T_0 metrischer Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{N}(T)}"'] & F \\ E/\mathcal{N}(T) \arrow[r, "T_0"] & \mathcal{R}(T) \arrow[u, "I_{\mathcal{R}(T)}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung 3: Zum Faktorisierungssatz von Operatoren.

Beweis:

1. Wohldefiniertheit der Abbildung T_0 folgt aus $(x - y) \in \mathcal{N}(T)$ für $[x] = [y]$. Surjektivität ist klar. Injektivität folgt aus
$$T_0\,[x] = 0 \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{N}(T) \;\Rightarrow\; [x] = 0_{E/\mathcal{N}(T)}$$
Wegen
$$I_{\mathcal{R}(T)} T_0 Q_{\mathcal{N}(T)} x = \underbrace{I_{\mathcal{R}(T)} \underbrace{T_0\,[x]}_{Tx \in \mathcal{R}(T)}}_{Tx} = Tx \quad \forall\, x \in E$$
gilt Faktorisierung (3.2.8.1). Schließlich gilt
$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| < 1} \left\| I_{\mathcal{R}(T)} T_0 Q_{\mathcal{N}(T)} x \right\|$$
$$\overset{\substack{I_{\mathcal{R}(T)} \\ \text{metrische} \\ \text{Injektion}}}{=} \sup_{\|x\|<1} \left\| T_0 Q_{\mathcal{N}(T)} x \right\| \overset{\substack{Q_{\mathcal{N}(T)} \\ \text{metrische} \\ \text{Surjektion} \\ (3.2.7)}}{=} \sup_{\|x\|<1} \|T_0 x\| = \|T_0\|$$

2. Da T metrische Injektion ist, ist $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ und $Q_{\mathcal{N}(T)}$ ist bijektive, metrische Injektion. Daher
$$\|[x]\| \overset{\substack{Q^{-1}_{\mathcal{N}(T)} \\ \text{metrische} \\ \text{Injektion} \\ (3.2.6)}}{=} \left\| Q^{-1}_{\mathcal{N}(T)}\,[x] \right\| \overset{\substack{T \\ \text{metrische} \\ \text{Injektion}}}{=} \left\| T Q^{-1}_{\mathcal{N}(T)}\,[x] \right\| = \left\| I_{\mathcal{R}(T)} T_0\,[x] \right\| \overset{\substack{I_{\mathcal{R}(T)} \\ \text{metrische} \\ \text{Injektion}}}{=} \|T_0\,[x]\| \quad \forall\, x \in E$$

□

3.2.9 Definition: Funktional

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ein *Funktional* auf einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist ein beschränkter, lineare Operator $a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Man schreibt
$$\langle x, a \rangle := a(x) \quad , \quad x \in E$$
und nennt den Banachraum $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ den *dualen Banachraum* von E.

3.2.10 Beispiel: Der l_1

Seien $E_1, E_2, ..$ Banachräume (jeweils über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann definiert
$$l_1(\mathbf{E}) := l_1\left((E_j)_{j=1}^{\infty}\right) := \left\{ \mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \bigtimes_{j=1}^{\infty} E_j \;:\; \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty \right\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|\mathbf{x}\| := \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \quad , \quad \mathbf{x} \in l_1(\mathbf{E})$$

einen Banachraum (über $\mathbb{K}$ falls alle E_i $\mathbb{K}$-wertig bzw. über $\mathbb{R}$ falls gemischt). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ seien ferner die Einbettung $I_k : E_k \to l_1(\mathbf{E})$ definiert durch

$$I_k(x) := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{x}, 0, \dots) \in l_1(\mathbf{E}) \quad , \quad x \in E_k$$

und die Projektion $P_k : l_1(\mathbf{E}) \to E_k$ definiert durch

$$P_k(\mathbf{x}) := x_k \quad , \quad \mathbf{x} \in l_1(\mathbf{E})$$

Dann:

- I_k ist metrische Injektion
- P_k ist metrische Surjektion
- $P_k I_k = \mathrm{Id}_{E_k}$.

Spezialfall: Für $E_k = \mathbb{K} \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$ ist $l_1(\mathbf{E}) = l_1(\mathbb{K})$.

3.3 Duale Operator

3.3.1 Definition: Dualer Operator

Seien E, F Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dann heißt der Operator $T' : F' \to E'$ definiert durch

$$T'a := a \circ T \quad , \quad a \in F'$$

dualer Operator von T. Dabei ist $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ beschränkt, linear und man schreibt

$$\langle x, T'a \rangle = \langle Tx, a \rangle$$

3.3.2 Lemma: Norm des dualen Operators

Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein beschränkter, linearer Operator zwischen den Banachräumen E, F, dazu der duale Operator T'. Dann ist

$$\|T'\| = \|T\|$$

Beweis: Nach Hahn-Banach

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| \overset{A.1.2(2)}{=} \sup_{\|x\| \le 1} \sup_{\substack{a \in F' \\ \|a\| \le 1}} \underbrace{|\langle Tx, a \rangle|}_{|\langle x, T'a \rangle|} = \sup_{\substack{a \in F' \\ \|a\| \le 1}} \underbrace{\sup_{\|x\| \le 1} |\langle x, T'a \rangle|}_{\|T'a\|} = \|T'\|$$

□

3.3.3 Definition: Bidualer Raum & kanonische Einbettung

Zu normierten Raum E heißt $E'' := (E')'$ *bidualer Banachraum* von E. Die lineare Abbildung

$$K_E : E \to E'' \quad , x \mapsto K_E x \in E''$$

definiert durch

$$(K_E x)a := a(x) \quad , \quad a \in E', \; x \in E$$

heißt *kanonische Einbettung* von E in E''.

3.3.4 Satz zur kanonischen Einbettung

Die kanonische Einbettung $K_E : E \to E''$ eines Banachraumes E in seinen bidualen Raum E'' ist eine metrische Injektion. Ferner gilt

$$\mathrm{Id}'_E = \mathrm{Id}_{E'} = K'_E K_{E'}$$

$$\begin{tikzcd} & E''' \arrow[dl, "K'_E"'] & \\ E' \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{E'}"'] & & E' \arrow[ul, "K_{E'}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung 4: Zur kanonischen Einbettung von E' in E'''.

Beweis: Linearität ist klar. Nach Hahn-Banach

$$\|K_E x\| = \sup_{\|a\|\leq 1} \| \underbrace{(K_E x)a}_{ax} \| \overset{A.1.2(2)}{=} \|x\| \quad \forall\, x \in E$$

Wegen

$$\left\langle x, \mathrm{Id}'_E\, a \right\rangle = \langle \mathrm{Id}_E\, x, a\rangle = \langle x, a\rangle = \langle x, \mathrm{Id}_{E'}\, a\rangle \quad \forall\, x \in E,\ a \in E'$$

ist $\mathrm{Id}'_E = \mathrm{Id}_{E'}$. Wegen

$$\langle x, K'_E K_{E'} a\rangle = \langle K_E x, K_{E'} a\rangle = \langle a, K_E x\rangle = \langle x, a\rangle \quad \forall\, x \in E,\ a \in E'$$

ist schließlich $\mathrm{Id}_{E'} = K'_E K_{E'}$.
□

3.3.5 Rechenregeln zum dualen Operator

Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein beschränkter, linearer Operator zwischen den Banachräumen E, F. Dann gilt:

1. $T'' K_E = K_F T$
2. T ist surjektiv $\Rightarrow$ T' ist injektiv
3. T ist eine Injektion $\Rightarrow$ T' ist eine Surjektion.
4. T ist eine metrische Injektion $\Rightarrow$ T' ist eine metrische Surjektion.
5. T ist eine metrische Surjektion $\Rightarrow$ T' ist metrische Injektion.
6. T ist bijektiv $\Rightarrow$ T' ist bijektiv. Gegebenfalls gilt dann $(T^{-1})' = (T')^{-1}$

Beweis:

1. Wegen
$$\langle a, T'' K_E x\rangle = \langle T' a, K_E x\rangle = \langle x, T' a\rangle = \langle Tx, a\rangle = \langle a, K_F T x\rangle \quad \forall\, a \in F',\ x \in E$$
gilt tatsächlich $T'' K_E = K_F T$.
2. Sei $T' a = 0$ für irgendein $a \in F'$, dann
$$\langle a, Tx\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in E \ \overset{T\text{ surj.}}{\Longleftrightarrow}\ \langle a, y\rangle = 0 \ \ \forall\, y \in F \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

3. Sei $a \in E'$ beliebig und
$$T_0 : E \to \mathcal{R}(T) \quad , \quad T_0 x := Tx \quad , \quad x \in E$$
Dann ist $T_0 \in \mathcal{L}(E, \mathcal{R}(T))$ bijektiv und
$$\widetilde{b} := a \circ T_0^{-1} \tag{3.3.5.1}$$
ist als Funktional auf $\mathcal{R}(T) \subseteq F$ wohldefiniert. Nach Hahn-Banach A.1.1 kann dieses (normerhaltend) zu einem Funktional b auf F fortgesetzt werden (beachte: $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen) und es gilt $T'b = a$, denn
$$\langle x, T'b \rangle = \langle Tx, b \rangle = \langle Tx, \widetilde{b} \rangle = \left\langle Tx, a \circ T_0^{-1} \right\rangle = \left\langle T_0^{-1} Tx, a \right\rangle = \langle x, a \rangle \quad \forall\, x \in E$$

4. Wegen $\|T'\| = \|T\|$ ist $T'(B_1(0_{F'})) \subseteq B_1(0_{E'})$. Es genügt daher zu zeigen
$$B_1(0_{E'}) \subseteq T'(B_1(0_{F'}))$$
Sei also $a \in B_1(0_{E'})$, dazu $\widetilde{b}$ bzw. b wie in Teil (3). Da T metrische Injektion ist, ist T_0 metrischer Isomorphismus und es gilt
$$\|b\| = \|\widetilde{b}\| \stackrel{(3.3.5.1)}{=} \|(T_0^{-1})'a\| \leq \underbrace{\left\|(T_0^{-1})'\right\|}_{\|T_0^{-1}\|=1} \cdot \|a\| = \|a\|$$

5. Zu $b \in F'$ gilt
$$\|T'b\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \underbrace{\|T'bx\|}_{\|bTx\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|bTx\| \stackrel{\substack{T \\ \text{metrische} \\ \text{Surjektion}}}{=} \sup_{\|y\|\leq 1} \|by\| = \|b\|$$

6. Ist T bijektiv, so ist T insbesondere surjektiv und eine Injektion, so dass nach (2) und (3) auch T' bijektiv ist.

   Aus
$$\left\langle x, (T^{-1})'a \right\rangle = \left\langle T^{-1}x, a \right\rangle = \left\langle T^{-1}x, T'(T')^{-1}a \right\rangle = \left\langle TT^{-1}x, (T')^{-1}a \right\rangle = \left\langle x, (T')^{-1}a \right\rangle \quad \forall\, a \in E',\ x \in F$$
   folgt die Behauptung.

□

Bemerke: Im allgemeinen folgt aus der Injektivität von T <u>nicht</u> die Surjektivität von T'! Als Beispiel diene die Inklusion
$$I : l_1 \to l_0 \quad , \quad I \underbrace{(\xi_1, \xi_2, ..)}_{\in l_1} := \underbrace{(\xi_1, \xi_2, ..)}_{\in l_0}$$
deren dualer Operator
$$I' : l_0' = l_1 \to l_1' = l_\infty \quad , \quad I \underbrace{(\xi_1, \xi_2, ..)}_{\in l_1} := \underbrace{(\xi_1, \xi_2, ..)}_{\in l_\infty}$$
nicht surjektiv ist[1]!

3.3.6 Das Frechet-Riesz Repräsentationstheorem

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zu jedem stetigen, linearen Funktional $a \in \mathcal{H}'$ existiert genau ein $y \in \mathcal{H}$ mit
$$a(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

[1] Beachte $l_1 \subseteq l_0 \subseteq l_\infty$ wobei
$$l_0 := \left\{ (\xi_1, \xi_2, ..) \in l_\infty : \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0 \right\}$$

Bemerkung: Definiert man die konjugiert-lineare[2] Abbildung

$$\mathscr{R}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}' \quad , \quad \mathscr{R}_{\mathcal{H}}(y) := \underbrace{(x \mapsto \langle x, y \rangle)}_{\in \mathcal{H}'} \quad , \quad y \in \mathcal{H}$$

so besagt das Theorem dass $\mathscr{R}_{\mathcal{H}}$ bijektiv ist. Ferner lässt sich leicht zeigen

$$\|\mathscr{R}_{\mathcal{H}}(y)\| = \|y\| \quad \forall\, y \in \mathcal{H}$$

das heißt $\mathscr{R}_{\mathcal{H}}$ ist metrischer Isomorphismus.

3.3.7 Definition: Adjungierter Operator

Seien H, K Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Dann heißt der Operator $T^\dagger : K \to H$ definiert durch

$$\left\langle x, T^\dagger y \right\rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \forall\, x \in H,\ y \in K \tag{3.3.7.1}$$

adjungierter Operator zu T. Ist $T^\dagger = T$, so heißt T *selbstadjungiert*.

Bemerkungen: Bedingung (3.3.7.1) legt den Operator $T^\dagger$ eindeutig fest. Dabei existiert $T^\dagger y$ tatsächlich für jedes $y \in K$, da nach Frechet-Riesz 3.3.6 stets ein $z \in H$ existiert so dass die Linearform

$$(x \mapsto \langle Tx, y \rangle) \in H'$$

durch $z =: T^\dagger y$ dargestellt wird, sprich

$$\langle Tx, y \rangle = \left\langle x, T^\dagger y \right\rangle \quad \forall\, x \in H$$

Linearität von $T^\dagger$ ist klar, Beschränktheit folgt aus

$$\left\|T^\dagger y\right\| = \|(x \mapsto \langle Tx, y \rangle)\| \leq \|y\| \cdot \|T\|$$

Alternativ kann $T^\dagger$ dargestellt werden durch

$$T^\dagger = \mathscr{R}_H^{-1} \circ T' \circ \mathscr{R}_K$$

(vgl. Abb. (5)) da aus

$$\left\langle x, \mathscr{R}_H T^\dagger y \right\rangle = \left\langle x, T^\dagger y \right\rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle Tx, \mathscr{R}_K y \rangle = \langle x, T' \mathscr{R}_K y \rangle \quad \forall\, x \in H,\ y \in K$$

folgt $\mathscr{R}_H T^\dagger = T' \mathscr{R}_K$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "T^\dagger"] \arrow[d, "\mathscr{R}_H"'] & H \\
K' \arrow[r, "T'"] & H' \arrow[u, "\mathscr{R}_H^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5: Zur Darstellung des adjungierten Operators $T^\dagger$ mit Hilfe der Einbettungen $\mathscr{R}_H, \mathscr{R}_K$.

3.4 Finite Operatoren

3.4.1 Definition: Finiter Operator

Ein beschränkter, linearer Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F heißt *finit*, falls

$$\operatorname{rang}(T) := \dim \operatorname{image}(T) < \infty$$

Man setzt

$$\mathcal{F}(E, F) := \{T \in \mathcal{L}(E, F) :\ \text{finit}\}$$

als den Raum aller finiten Operatoren in $\mathcal{L}(E, F)$.

[2] $T : E \to F$ heißt *konjugiert-linear* falls $T(\alpha x) = \alpha^* \cdot Tx \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ x \in E$.

Beispiel: Für $a \in E',\ y \in F$ wird durch

$$(a \otimes y) : E \to F \quad , \quad (a \otimes y)x := \langle x, a \rangle \cdot y \quad , \quad x \in E$$

ein finiter Operator mit

$$\text{image}(a \otimes y) \subseteq \text{span}\{y\}$$

und

$$\|a \otimes y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| \cdot \|y\| = \|a\| \cdot \|y\|$$

definiert.

3.4.2 Permanenzeigenschaften finiter Operatoren

Seien E, F, G Banachräumen. Dann gilt:

1. Für finiten Operator $T \in \mathcal{F}(E, F)$ und Operator $S \in \mathcal{L}(F, G)$ ist auch $S \circ T \in \mathcal{F}(E, G)$ finit.
2. Für Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ und finiten Operator $S \in \mathcal{F}(F, G)$ ist auch $S \circ T \in \mathcal{F}(E, G)$ finit.
3. Für finite Operatoren $T, S \in \mathcal{F}(E, F)$ ist auch $(T + S) \in \mathcal{F}(E, F)$ finit, sprich $\mathcal{F}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ ist tatsächlich ein linearer (jedoch allgemein nicht abgeschlossener) Teilraum.

3.4.3 Satz über folgen finiter Operatoren

Seien $T_1, T_2, .. \in \mathcal{F}(E, F)$ finite Operatoren zwischen den Banachräumen E, F mit $\text{rang}(T_k) < n \ \ \forall\ k$ und

$$T_k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} T$$

für irgendeinen $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dann ist auch T finit mit $\text{rang}(T) < n$.

Beweis: Angenommen $\text{rang}(T) \geq n$, dann existieren linear unabhängige $y_1, .., y_n \in \text{image}(T)$. Dabei seien $y_1 = T(x_1), .., y_n = T(x_n)$ für irgendwelche $x_1, .., x_n \in E$. Nach Voraussetzung gehen

$$y_{k1} := T_k(x_1) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} y_1,\ \ldots,\ y_{kn} := T_k(x_n) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} y_n$$

wobei die $\overbrace{\{y_{k1}, .., y_{kn}\}}^{\subseteq \text{image}(T_k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ linear abhängig sind. Nach A.1.6 müssten dann aber auch die Grenzwerte $\{y_1, .., y_n\}$ linear abhängig sein, ein Widerspruch!
□

3.4.4 Satz: Darstellung finiter Operatoren

Ist $T \in \mathcal{F}(E, F)$ finiter Operator zwischen den Banachräumen E, F, so existieren zu jeder Basis $y_1, .., y_n$ von $\mathcal{R}(T)$ eindeutig bestimmte, linear unabhängige $a_1, .., a_n \in E'$ mit

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \tag{3.4.4.1}$$

Dabei gilt:

$$\text{rang}(T) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \ \middle|\ \exists\ a_i \in E',\ y_i \in F : T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \right\} \tag{3.4.4.2}$$

Beweis der Existenz: Sei $y_1, .., y_n$ eine Basis im endlich-dimensionalen Teilraum $\mathcal{R}(T) \subseteq F$ und

$$T = I_{\mathcal{R}(T)} \circ T_0 \circ Q_{\mathcal{N}(T)}$$

die Faktorisierung von T wie in Faktorisierungssatz 3.2.8, sprich

$$\begin{aligned} T_0\,[x] &:= Tx \quad , \quad x \in E/\mathcal{N}(T) \\ I_{\mathcal{R}(T)} y &:= y \quad , \quad y \in \mathcal{R}(T) \\ Q_{\mathcal{N}(T)} x &:= [x] \quad , \quad x \in E \end{aligned}$$

Weil $T_0 : E/\mathcal{N}(T) \to \mathcal{R}(T)$ isomorph ist, existieren $[x_1]\,, .., [x_n] \in E/\mathcal{N}(T)$ mit $T_0\,[x_i] = y_i$, wobei die $[x_1]\,, .., [x_i]$ eine Basis in $E/\mathcal{N}(T)$ bilden. Dazu sei

$$\widehat{a}_1, .., \widehat{a}_n \in (E/\mathcal{N}(T))' \quad , \quad \widehat{a}_i\,[x_j] = \delta_{ij}$$

die duale Basis[3] (*Koordinatenfunktionale*). Dann ist jedes $[x] \in E/\mathcal{N}(T)$ darstellbar gemäß

$$[x] = \sum_{i=1}^{n} \langle [x]\,, \widehat{a}_i \rangle \cdot [x_i]$$

Dementsprechend ist

$$Q_{\mathcal{N}(T)} x = [x] = \sum_{i=1}^{n} \left\langle Q_{\mathcal{N}(T)} x, \widehat{a}_i \right\rangle \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^{n} \left\langle x, Q'_{\mathcal{N}(T)} \widehat{a}_i \right\rangle \cdot [x_i]$$

bzw.

$$Tx = I_{\mathcal{R}(T)} T_0 Q_{\mathcal{N}(T)} x = \sum_{i=1}^{n} \left\langle x, Q'_{\mathcal{N}(T)} \widehat{a}_i \right\rangle \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i \rangle \cdot y_i$$

mit

$$a_i := Q'_{\mathcal{N}(T)} \widehat{a}_i \in E' \quad , \quad i = 1, .., n$$

Nach 3.2.7 ist

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{N}(T)} : E \to E/\mathcal{N}(T)$$

surjektiv, nach 3.3.5

$$Q'_{\mathcal{N}(T)} : (E/\mathcal{N}(T))' \to E'$$

injektiv. Da die $\widehat{a}_i$ unabhängig sind, sind daher auch die a_i unabhängig. Wegen

$$\operatorname{rang}(T) = \dim \mathcal{R}(T) \overset{\substack{\{y_i\}_{i=1}^n \\ \text{Basis in} \\ \mathcal{R}(T)}}{=} n$$

folgt schließlich Behauptung (3.4.4.2).
Beweis der Eindeutigkeit: Seien nun $b_1, .., b_n \in E'$ mit

$$T = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i$$

Wegen

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \otimes y_i$$

gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i - b_i \rangle \cdot y_i \quad \forall\ x \in E$$

bzw. wegen linearer Unabhängigkeit der y_i

$$\langle x, a_i - b_i \rangle = 0 \quad \forall\ x \in E,\ i = 1, .., n$$

und daher $a_i = b_i\ \forall\ i$.
□

[3] Beachte dass die $\widehat{a}_i$ beschränkt sind, da $E/\mathcal{N}(T)$ endlich-dimensional ist.

3.4.5 Lemma über finite Operatoren und Matrizen

Seien E, F $\mathbb{K}$-Banachräume und $T \in \mathcal{F}(E, F)$ ein finiter Operator mit der Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \quad , \quad a_i \in E',\ y_i \in F$$

Ist die Matrix

$$M := (\langle x_i, a_j \rangle)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

ähnlich[4] zu einer weiteren Matrix $N \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so besitzt T auch eine Darstellung

$$T = \sum_{j=1}^{n} b_j \otimes y_j \quad , \quad b_j \in E',\ y_j \in F$$

mit $N = (\langle y_i, b_j \rangle)_{i,j=1}^{n}$.

Beweis: Sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar mit $M = X^{-1}NX$ und setze

$$y_i := \sum_{k=1}^{n} X_{ik} x_k \quad , \quad b_j := \sum_{l=1}^{n} (X^{-1})_{lj} a_l$$

Dann gilt

$$\langle y_i, b_j \rangle = \sum_{k,l=1}^{n} X_{ik} \langle x_k, a_l \rangle (X^{-1})_{lj} = (XMX^{-1})_{ij} = N_{ij}$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \otimes y_j = \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (X^{-1})_{lj} \cdot X_{jk}}_{\delta_{lk}} \cdot a_l \otimes x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes x_k = T$$

□

3.5 Operatorenideale

3.5.1 Definition: Operatorenideal

Sei $\mathscr{E}$ eine Klasse von Banachräumen. Für jedes Paar $E, F \in \mathscr{E}$ sei eine Teilmenge $\mathcal{A}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ gegeben. Die Klasse

$$\mathcal{A} := \bigcup_{E,F\in\mathscr{E}} \mathcal{A}(E, F)$$

heißt *Operatorenideal* über $\mathscr{E}$, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $a \otimes y \in \mathcal{A}(E, F) \quad \forall\, a \in E',\ y \in F,\ E, F \in \mathscr{E}$
2. Für $S, T \in \mathcal{A}(E, F)$ ist auch $(S + T) \in \mathcal{A}(E, F)$
3. Für $R \in \mathcal{L}(E_0, E),\ T \in \mathcal{A}(E, F),\ S \in \mathcal{L}(F, F_0),\ E_0, E, F, F_0 \in \mathscr{E}$ ist $STR \in \mathcal{A}(E_0, F_0)$

Bemerkungen:

(i) Typischerweise nimmt man $\mathscr{E}$ als die Klasse $\mathscr{E}_\infty$ aller bzw. Klasse $\mathscr{E}_\mathbb{K}$ aller $\mathbb{K}$-Banachräume an ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Im ersten Fall spricht man auch einfach von einem Operatorenideal.

(ii) Für $\mathbb{K}$-Banachräume $E, F \in \mathscr{E}$ kann jedes Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ als beschränkter, linearer Operator $\lambda \in \mathcal{L}(F, F)$ interpretiert werden. Ist nun $T \in \mathcal{A}(E, F)$, so ist nach Voraussetzung (3) auch $\lambda T \in \mathcal{A}(E, F)$, das heißt $\mathcal{A}(E, F)$ ist linearer Teilraum von $\mathcal{L}(E, F)$.

[4] Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls $A = X^{-1}BX$ für irgendeine invertierbare $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(iii) Setzt man

$$\mathcal{L}_{\mathscr{E}} := \bigcup_{E,F\in\mathscr{E}} \mathcal{L}(E,F) \quad , \quad \mathcal{F}_{\mathscr{E}} := \bigcup_{E,F\in\mathscr{E}} \mathcal{F}(E,F)$$

so sind $\mathcal{L}_{\mathscr{E}}$ und $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ Operatorenideale über $\mathscr{E}$ und es gilt

$$\mathcal{F}_{\mathscr{E}} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_{\mathscr{E}}$$

Insbesondere ist $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ das kleinste Operatorenideal über $\mathscr{E}$.

3.5.2 Definition: Quasinorm

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ und $0 < p < \infty$. Eine Abbildung

$$\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$$

heißt *p-Quasinorm* auf $\mathcal{A}$ wenn folgende Eigenschaften gelten:

1. Für $E,F \in \mathscr{E}$ gilt

$$\nu(a \otimes y) = \underbrace{\|a \otimes x\|}_{\|a\|\cdot\|y\|} \quad \forall\ a \in E',\ y \in F$$

2. Es existiert eine Konstante (*Quasinormkonstante*) $C_\nu \geq 1$ so dass für $E,F \in \mathscr{E}$ gilt

$$\nu^p(S+T) \leq C_\nu \cdot (\nu^p(S) + \nu^p(T)) \quad \forall\ S,T \in \mathcal{A}(E,F)$$

3. Für $R \in \mathcal{L}(E_0,E),\ T \in \mathcal{A}(E,F),\ S \in \mathcal{L}(F,F_0),\ E_0,E,F,F_0 \in \mathscr{E}$ lässt sich abschätzen

$$\nu(STR) \leq \|S\| \cdot \nu(T) \cdot \|R\|$$

Bemerkungen:

(i) Es ist $\nu(T) = 0$ genau dann wenn $T = 0$ (vgl. unten 3.5.5(1)).

(ii) Zu $\mathbb{K}$-Banachräumen $E,F \in \mathscr{E}$ gilt

$$\nu(\lambda T) = |\lambda| \cdot \nu(T) \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ T \in \mathcal{A}(E,F)$$

Erläuterung: Nach (3) gilt für $\lambda \neq 0$

$$\nu(\lambda T) \overset{(3)}{\leq} |\lambda| \cdot \nu(T) = |\lambda| \cdot \nu\left(\frac{1}{\lambda}\lambda T\right) \overset{(3)}{\leq} |\lambda| \cdot \frac{1}{|\lambda|} \cdot \nu(\lambda T) = \nu(\lambda T)$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist klar.

(iii) Ist $p = 1$, so heißt ν auch einfach *Quasinorm* auf $\mathcal{A}$.

(iv) Ist $C_\nu = 1$ eine Quasinormkonstante zu ν, so ist $\nu\,|_{\mathcal{A}(E,F)}$ eine p-Norm auf jedem linearen Raum $\mathcal{A}(E,F)$ für $E,F \in \mathscr{E}$ und ν heißt auch einfach *p-Norm*. Ist außerdem $p = 1$, so ist $\nu\,|_{\mathcal{A}(E,F)}$ sogar eine Norm und ν heißt auch einfach *Norm*.

Das Operatorenideal $\mathcal{A}$ mit p-Quasinorm ν heißt:

- *p-Quasi-Banachoperatorenideal* falls alle $\left[\mathcal{A}(E,F), \nu\,|_{\mathcal{A}(E,F)}\right]$ *p-Quasibanachräume* sind.
- *p-Banachoperatorenideal* falls alle $\left[\mathcal{A}(E,F), \nu\,|_{\mathcal{A}(E,F)}\right]$ *p-Banachräume* sind ($C_\nu = 1$).
- *Quasi-Banachoperatorenideal* (QBOI) falls alle $\left[\mathcal{A}(E,F), \nu\,|_{\mathcal{A}(E,F)}\right]$ *Quasibanachräume* sind ($p = 1$).
- *Banachoperatorenideal* falls alle $\left[\mathcal{A}(E,F), \nu\,|_{\mathcal{A}(E,F)}\right]$ *Banachräume* sind ($C_\nu = 1, p = 1$).

3.5.3 Spezialfälle der p-Quasinorm

Sei $0 < p < \infty$, $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ und ν eine p-Quasinorm auf $\mathcal{A}$.

1. Ist ν eine p-Norm, so muss $p \leq 1$ sein.

2. Ist ν eine p-Quasinorm mit Quasinormkonstante C_ν, so ist ν auch eine Quasinorm mit Quasinormkonstante $\widetilde{C}_\nu := \sqrt[p]{2C_\nu}$, sprich es gilt

$$\nu(S+T) \leq \widetilde{C}_\nu \cdot [\nu(S) + \nu(T)] \quad \forall\, S, T \in \mathcal{A}(E,F),\ E, F \in \mathscr{E}$$

Im Spezialfall $0 < p \leq 1$ ist sogar $\widetilde{C}_\nu := \frac{1}{2} \cdot \sqrt[p]{2C_\nu}$ Quasinormkonstante von ν.

Beweis:

1. Da $\nu \neq 0$, existiert ein $S \in \mathcal{A}$ mit $\nu(S) \neq 0$. Daher folgt aus

$$2^p \cdot \nu^p(S) = \nu^p(S+S) \leq \nu^p(S) + \nu^p(S) = 2\nu^p(S)$$

dass $2^p \leq 2$, sprich $p \leq 1$.

2. Für $S, T \in \mathcal{A}(E,F)$ gilt stets

$$\nu^p(S+T) \leq C_\nu \cdot [\nu^p(S) + \nu^p(T)] \leq 2C_\nu \max\{\nu(S), \nu(T)\}^p \leq 2C_\nu\, [\nu(S) + \nu(T)]^p$$

woraus der erster Teil der Behauptung folgt.
Spezialfall $0 < p \leq 1$**:** Aufgrund der Hölderschen Ungleichung A.3.1(2) für $\frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{r}$ folgt

$$\nu(S+T) \leq \sqrt[p]{C_\nu} \cdot [\nu^p(S) + \nu^p(T)]^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{C_\nu} \cdot [1^p \cdot \nu^p(S) + 1^p \cdot \nu^p(T)]^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt[p]{C_\nu} \cdot (1^r + 1^r)^{\frac{1}{r}} \cdot [\nu(S) + \nu(T)] = \sqrt[p]{C_p} \cdot \sqrt[r]{2} \cdot [\nu(S) + \nu(T)] = C_\nu^{\frac{1}{p}}\, 2^{\frac{1}{p}-1} \cdot [\nu(S) + \nu(T)]$$

□

3.5.4 Beispiel: p-nukleare Operatoren

Sei $0 < p \leq 1$, dazu

$$\mathfrak{N}_p(E,F) := \left\{ T \in \mathcal{L}(E,F) : T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i,\ \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i \otimes y_i\|^p < \infty \right\}$$

für beliebige Banachräume E, F. Zu $T \in \mathfrak{N}_p(E,F)$ sei definiert

$$N_p(T) := \inf \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i \otimes y_i\|^p \right]^{\frac{1}{p}} : T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i \right\}$$

Dann ist

$$\mathfrak{N}_p := \bigcup_{\substack{E,F \\ \text{Banachräume}}} \mathfrak{N}_p(E,F)$$

ein Operatorenideal und N_p eine p-Quasinorm auf $\mathfrak{N}_p$. Genauer gesagt, ist $N_p\,|_{\mathfrak{N}_p(E,F)}$ eine p-Norm auf jedem $\mathfrak{N}_p(E,F)$:

$$N_p^p(T+S) \leq N_p^p(T) + N_p^p(S) \quad \forall\, T, S \in \mathfrak{N}_p(E,F)$$

bzgl. derer $\mathfrak{N}_p(E,F)$ vollständig ist. $[\mathfrak{N}_p, N_p]$ ist also ein p-Banachoperatorenideal, das p-Banachoperatorenideal der *p-Nuklearen Operatoren*.
Die p-Nuklearen Operatoren sind in Abschnitt 5.2 genauer beschrieben.

3.5.5 Satz: Abschätzung der & bzgl. der Quasinorm

Sei $0 < p < \infty$ und $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$, darauf p-Quasinorm ν.

1. Es gilt stets
$$\|T\| \leq \nu(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{A}$$

2. Gilt lediglich
$$\|a \otimes y\| \leq \nu(a \otimes y) \quad \forall\, a \in E',\ y \in F,\ E, F \in \mathscr{E}$$
(Abschwächung der Bedingung (1) in Def. 3.5.2), so folgt trotzdem
$$\|T\| \leq \nu(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{A}$$

3. Sei $\mathbb{K} \in \mathscr{E}$. Gilt lediglich $\nu(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) = 1$ (Abschwächung der Bedingung (1) in Def. 3.5.2), so lässt sich trotzdem abschätzen
$$\|T\| \leq \nu(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{A}(E,F),\ E, F \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}} \cap \mathscr{E}$$

4. Sei $\mathbb{K} \in \mathscr{E}$. Dann gilt die Äquivalenz der Aussagen
$$\nu(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \nu(a \otimes x) = \|a \otimes y\| \quad \forall\, a \in E',\ x \in F,\ E, F \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}} \cap \mathscr{E}$$
(vgl. Bedingung (1) in Def. 3.5.2)

Beweis:

1. Siehe Teil (2).

2. Seien $E, F \in \mathscr{E}$ und $T \in \mathcal{A}(E,F)$. Dann gilt
$$\langle Tx, a\rangle\,(a \otimes x) = (a \otimes x)T(a \otimes x) \quad \forall\, a \in E', x \in F$$
bzw.
$$|\langle Tx, a\rangle| \cdot \nu(a \otimes x) = \nu\left[\langle Tx, a\rangle \cdot (a \otimes x)\right] = \nu\left[(a \otimes x)T(a \otimes x)\right] \leq \|a \otimes x\| \cdot \nu(T) \cdot \|a \otimes x\| = \|x\|^2\,\|a\|^2 \cdot \nu(T)$$
Wegen $\nu(a \otimes x) \geq \|a\| \cdot \|x\|$ entsprechend
$$|\langle Tx, a\rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\| \cdot \nu(T) \tag{3.5.5.1}$$
und daher
$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|a\|\leq 1}} |\langle Tx, a\rangle| \overset{(3.5.5.1)}{\leq} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|a\|\leq 1}} \|x\| \cdot \|a\| \cdot \nu(T) = \nu(T)$$

3. Seien $E, F \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}} \cap \mathscr{E}$ und $T \in \mathcal{A}(E,F)$. Dann gilt
$$\langle Tx, a\rangle\,(1 \otimes 1) = (a \otimes 1)T(1 \otimes x) \quad \forall\, a \in E', x \in F$$
bzw.
$$|\langle Tx, a\rangle| = |\langle Tx, a\rangle|\,\overbrace{\nu(1 \otimes 1)}^{1} = \nu\big[\,\langle Tx, a\rangle \cdot 1 \otimes 1\big] = \nu\big[(a \otimes 1)T(1 \otimes x)\big] \leq \underbrace{\|a \otimes 1\|}_{\|a\|} \cdot \nu(T) \cdot \underbrace{\|1 \otimes x\|}_{\|x\|} \tag{3.5.5.2}$$
und daher
$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|a\|\leq 1}} |\langle Tx, a\rangle| \overset{(3.5.5.2)}{\leq} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|a\|\leq 1}} \|a\| \cdot \|x\| \cdot \nu(T) = \nu(T)$$

4. Richtung "$\Leftarrow$" ist trivial da $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = 1 \otimes 1$.
Richtung "$\Rightarrow$": Es gelte $\nu(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) = 1$ und es seien $a \in E',\ x \in F$ für irgendwelche $\mathbb{K}$-Banachräume $E, F \in \mathscr{E}$. Dann ist
$$a \otimes x = (1 \otimes x)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}(a \otimes 1)$$
und es gilt
$$\|x\| \cdot \|a\| = \|a \otimes x\| \overset{(3)}{\leq} \nu(a \otimes x) = \nu\big[(1 \otimes x)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}(a \otimes 1)\big] \leq \underbrace{\|1 \otimes x\|}_{\|x\|} \cdot \underbrace{\nu(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}})}_{1} \cdot \underbrace{\|a \otimes 1\|}_{\|a\|} = \|x\| \cdot \|a\|$$

□

3.5.6 Definition: Approximierbarer Operator & Approximationszahl

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F heißt *approximierbar*:$\Leftrightarrow$

$$\exists\ (T_n) \subseteq \mathcal{F}(E,F) : \lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$$

Die n*-te Approximationszahl* von T ist durch

$$d_n(T) := \inf\left\{\|T - S\| : \mathrm{rang}(S) < n\right\}$$

definiert.

3.5.7 Permanenzeigenschaften approximierbarer Operatoren

Seien E, F, G Banachräume.

1. Sind $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$ approximierbar, so ist auch $(T+S)$ approximierbar.
2. Ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$ approximierbar und $S \in \mathcal{L}(F,G)$, so ist auch $S \circ T$ approximierbar.
3. Ist $T \in \mathcal{L}(F,G)$ approximierbar und $S \in \mathcal{L}(E,F)$, so ist auch $T \circ S$ approximierbar.
4. Sind $T_1, T_2, .. \in \mathcal{L}(E,F)$ approximierbar mit $T_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T$ für irgendein $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so ist auch T approximierbar.

Beweis:

1. Klar.
2. Sind $(T_k) \subseteq \mathcal{F}(E,F)$ mit $T_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T$, dann gehen auch
$$\underbrace{ST_k}_{\in\mathcal{F}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} ST$$
3. Analog.
4. Seien $T_{ki},\ k, i \in \mathbb{N}$ finit mit
$$T_{ki} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} T_i \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$
Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit
$$\|T_{k_n} - T\| \leq \frac{1}{2n}$$
Dazu existiert wiederum ein $i_{k_n} = i_n \in \mathbb{N}$ mit
$$\|T_{k_n i_n} - T_{k_n}\| \leq \frac{1}{2n}$$
also
$$\|T_{k_n i_n} - T\| \leq \|T_{k_n i_n} - T_{k_n}\| + \|T_{k_n} - T\| \leq \frac{1}{n}$$
Es gehen also
$$T_{k_n i_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$$

□

3.5.8 Eigenschaften der Approximationszahlen

Seien E, F, G Banachräume und d_n die n-te Approximationszahl. Dann gilt:

1. $\|T\| = d_1(T) \geq d_2(T) \geq \cdots \geq 0 \quad \forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$
2. $d_n(\lambda T) = |\lambda| \cdot d_n(T) \;\; \forall\, T \in \mathcal{L}(E,F),\; \lambda \in \mathbb{K}$
3. $d_{n+m-1}(S+T) \leq d_n(S) + d_m(T) \quad \forall\, S,T \in \mathcal{L}(E,F)$
4. $d_{n+m-1}(TS) \leq d_n(S) \cdot d_m(T) \quad \forall\, S \in \mathcal{L}(E,F),\; T \in \mathcal{L}(F,G)$
5. Ist $\dim E = n$, so gilt $d_n(\mathrm{Id}_E) = 1$ und $d_{n+1}(\mathrm{Id}_E) = 0$.
6. Ist $\dim E = \infty$ so gilt $d_n(\mathrm{Id}_E) = 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$
7. $\mathrm{rang}(T) < n \;\Leftrightarrow\; d_n = 0$

Beweis:

1. Klar.
2. Klar.
3.

$$\begin{aligned} d_{n+m-1}(S+T) &= \inf\{\|S+T-H\| : \mathrm{rang}(H) \leq n+m-2\} \\ &\leq \inf\Big\{\underbrace{\|S+T-(A+B)\|}_{\leq \|S-A\|+\|T-B\|} : \mathrm{rang}(A) \leq n-1,\; \mathrm{rang}(B) \leq m-1\Big\} \\ &= \inf\{\|S-A\| : \mathrm{rang}(A) \leq n-1\} + \inf\{\|T-B\| : \mathrm{rang}(B) \leq m-1\} = d_n(S) + d_m(T) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} d_{n+m-1}(ST) &= \inf\{\|ST-H\| : \mathrm{rang}(H) \leq n+m-2\} \\ &\leq \inf\Big\{\|\underbrace{ST-SB-A(T-B)}_{(S-A)(T-B)}\| : \mathrm{rang}(A) \leq n-1,\; \mathrm{rang}(B) \leq m-1\Big\} \\ &\leq \inf\{\|S-A\| \cdot \|T-B\| : \mathrm{rang}(A) \leq n-1,\; \mathrm{rang}(B) \leq m-1\} \\ &= \inf\{\|S-A\| : \mathrm{rang}(A) \leq n-1\} \cdot \inf\{\|T-B\| : \mathrm{rang}(B) \leq m-1\} = d_n(S) \cdot d_m(T) \end{aligned}$$

5. Für jeden $S \in \mathcal{L}(E)$ mit $\mathrm{rang}(S) < n$ existiert ein $0 \neq x \in \mathrm{kernel}(S)$. Insbesondere $\|(\mathrm{Id} - S)x\| = \|\mathrm{Id}\, x\| = \|x\|$, sprich $\|\mathrm{Id} - S\| \geq 1$. Folglich

$$d_n(\mathrm{Id}) = \inf\Big\{\underbrace{\|\mathrm{Id} - S\|}_{\geq 1} : \mathrm{rang}(S) < n\Big\} = 1$$

   Aus $\mathrm{rang}(\mathrm{Id}) = n$ folgt schließlich $d_{n+1}(\mathrm{Id}) = 0$.

6. Für jeden finiten $S \in \mathcal{F}(E)$ existiert ein $0 \neq x \in \mathrm{kernel}(S)$, so dass analog zu vorhin $\|\mathrm{Id} - S\| \geq 1$. Folglich

$$d_n(\mathrm{Id}) = \inf\Big\{\underbrace{\|\mathrm{Id} - S\|}_{\geq 1} : \mathrm{rang}(S) < n\Big\} = 1$$

7. Richtung "⇒" ist klar.
   Richtung "⇐": Ist $d_n = 0$, so existieren finite Operatoren $T_1, T_2, .. \in \mathcal{F}(E,F)$ mit $\operatorname{rang}(T_k) < n \ \forall \ k$ und
$$T_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T$$
   Nach 3.4.3 ist dann auch T finit mit $\operatorname{rang}(T) < n$.

□

3.5.9 Satz zu Approximationszahlen & approximierbaren Operatoren

Seien E, F, G Banachräume, dazu die Approximationszahlen d_n und
$$d := \lim_{n\to\infty} d_n = \inf\{\|T - S\| : S \in \mathcal{F}(E,F)\}$$
Dann gilt:

1. $d(\lambda S) = |\lambda| \cdot d(S) \ \ \forall \ S \in \mathcal{L}(E,F), \ \lambda \in \mathbb{K}$
2. $d(S+T) \leq d(S) + d(T) \ \ \forall \ S, T \in \mathcal{L}(E,F)$
3. $d(ST) \leq d(S) \cdot d(T) \ \ \forall \ T \in \mathcal{L}(E,F), \ S \in \mathcal{L}(F,G)$
4. Zu $T \in \mathcal{L}(E,F)$ ist T approximierbar $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_n(T) = 0$
5. Ist $\dim E < \infty$ so gilt $d(\mathrm{Id}_E) = 0$
6. Ist $\dim E = \infty$ so gilt $d(\mathrm{Id}_E) = 1$
7. Ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$ approximierbar und $S \in \mathcal{L}(E,F)$ nicht approximierbar, so ist $T + S$ nicht approximierbar.

Beweis: Direkte Folgerung aus 3.5.8.

3.5.10 Definition: Approximatives Quasi-Banachoperatorenideal

Ein Operatorenideal $\mathcal{A}$ mit p-Quasinorm ν über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ heißt *approximativ*, falls $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ dicht in $\mathcal{A}$ liegt, sprich
$$\forall \ E, F \in \mathscr{E}, \ \ S \in \mathcal{A}(E,F), \ \varepsilon > 0 \ : \ \exists \ T \in \mathcal{F}(E,F) : \nu(T - S) \leq \varepsilon$$

3.5.11 Beispiel: Approximatives Banachoperatorenideal

Setzt man zu Banachräumen E, F
$$\mathcal{L}^{(d)}(E,F) := \left\{T \in \mathcal{L}(E,F) : d_n(T) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$
so ist $\left[\mathcal{L}^{(d)}, \|\cdot\|\right]$ ein approximatives Banachoperatorenideal über alle Banachräume. Insbesondere ist jede Komponente
$$\left[\mathcal{L}^{(d)}(E,F), \|\cdot\|\right] \subseteq \left[\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|\right]$$
abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(E,F)$.

Beweis der Abgeschlossenheit: Sei $(T_n) \subseteq \mathcal{L}^{(d)}(E,F)$ eine Folge die in $\mathcal{L}(E,F)$ konvergiert, das heißt
$$\|T - T_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
für irgendein $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Doch wegen
$$d(T) \leq d(T - T_n) + \underbrace{d(T_n)}_{0} \leq \|T - T_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
ist auch $T \in \mathcal{L}^{(d)}(E,F)$.
□

Interpretation: $\left[\mathcal{L}^{(d)}, \|\cdot\|\right]$ kann als Vervollständigung der finiten Operatoren $[\mathcal{F}, \|\cdot\|]$ angesehen werden.

3.5.12 Satz: Vergleich von QBOI

Seien $[\mathcal{A}, \nu]$ und $[\mathcal{B}, \mu]$ Quasibanachoperatorenideale über die Banachraumklasse $\mathscr{E} \in \{\mathscr{E}_\infty, \mathscr{E}_\mathbb{R}, \mathscr{E}_\mathbb{C}\}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann existiert eine Konstante ρ mit

$$\mu(T) \leq \rho \cdot \nu(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{A}$$

Beweis durch Widerspruch: Annahme, die Aussage sei falsch, das heißt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\forall\, \rho \geq 0 : \exists\, T \in \mathcal{A} : \mu(T) > \rho \cdot \nu(T)$. Insbesondere existieren dann

$$E_n, F_n \in \mathscr{E},\ T_n \in \mathcal{A}(E_n, F_n) : \mu(T_n) > n \cdot (2C_\nu)^n \cdot \nu(T_n)$$

(beachte dass $T_n \neq 0$) wobei C_ν die Quasinorm-Konstante von ν sei (vgl. 3.5.2(2)). Setzen

$$S_n := (2C_\nu)^{-n} \cdot \frac{T_n}{\nu(T_n)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

so dass gilt

$$\nu(S_n) = (2C_\nu)^{-n} \quad , \quad \mu(S_n) > n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.5.12.1}$$

Betrachten nun die Banachräume

$$l_1(\mathbf{E}) := l_1\left((E_k)_{k=1}^\infty\right) \quad , \quad l_1(\mathbf{F}) := l_1\left((F_k)_{k=1}^\infty\right)$$

dazu die Inklusionen $I_k : F_k \to l_1(\mathbf{F})$ und Projektionen $P_k : l_1(\mathbf{E}) \to E_k$ definiert wie in 3.2.10. Dann bilden die Partialsummen

$$\widetilde{S}_m := \sum_{k=1}^{m} I_k S_k P_k \ \in \mathcal{A}\left(l_1(\mathbf{E}),\ l_1(\mathbf{F})\right)$$

wegen

$$\nu(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_m) = \nu\left[\sum_{k=1}^{m-n} I_{m+k} S_{m+k} P_{m+k}\right] \overset{3.5.2(2)}{\leq} \sum_{k=1}^{m-n} C_\nu^k \cdot \nu\left(I_{m+k} S_{m+k} P_{m+k}\right)$$

$$\overset{3.5.2(3)}{\leq} \sum_{k=1}^{m-n} C_\nu^k \cdot \underbrace{\|I_{m+k}\|}_{1} \cdot \nu(S_{m+k}) \cdot \underbrace{\|P_{m+k}\|}_{1} \leq \sum_{k=1}^{m-n} C_\nu^k \cdot \underbrace{\nu(S_{m+k})}_{(2C_\nu)^{-(m+k)}}$$

$$= (2C_\nu)^{-m} \sum_{k=1}^{m-n} 2^{-k} \leq (2C_\nu)^{-m} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}}_{1} = (2C_\nu)^{-m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

eine ν-Cauchyfolge mit Grenzwert

$$\widetilde{S} := \lim_{m\to\infty} \widetilde{S}_m = \sum_{k=1}^{\infty} I_k S_k P_k \ \in \mathcal{A}\left(l_1(\mathbf{E}),\ l_1(\mathbf{F})\right) \ \subseteq\ \mathcal{B}\left(l_1(\mathbf{E}),\ l_1(\mathbf{F})\right)$$

(beachte dass $[\mathcal{A}, \nu]$ vollständig ist). Doch anderseits ist $P_n \widetilde{S} I_n = S_n$ und daher

$$n \overset{(3.5.12.1)}{<} \mu(S_n) = \mu(P_n \widetilde{S} I_n) \leq \underbrace{\|P_n\|}_{1} \cdot \mu(\widetilde{S}) \cdot \underbrace{\|I_n\|}_{1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

sprich $\mu(\widetilde{S}) = \infty$ was nicht sein kann!
□

3.5.13 Definition: Äquivalente Quasinormen

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ und $0 < p < \infty$. Dann heißen zwei p-Quasinormen ν, μ auf $\mathcal{A}$ *äquivalent* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ \rho_1, \rho_2 > 0 : \ \nu(T) \leq \rho_1 \cdot \mu(T)\ ,\ \mu(T) \leq \rho_2 \cdot \nu(T) \qquad \forall\ T \in \mathcal{A}$$

3.5.14 Theorem: Äquivalenz von Quasinormen

Für jedes QBOI $[\mathcal{A}, \nu]$ über die Banachraumklasse $\mathscr{E} \in \{\mathscr{E}_\infty, \mathscr{E}_\mathbb{R}, \mathscr{E}_\mathbb{C}\}$ ist die Quasinorm bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 3.5.12.

Bemerkungen:

(i) Die Voraussetzung dass $\mathscr{E}$ groß genug ist, ist hier tatsächlich notwendig!

(ii) Eine Quasinorm ν ist im Gegensatz zu Normen im allgemeinen nicht stetig bzgl. der eigenen Topologie, das heißt aus $\nu(T_n - T) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ T_n, T \in \mathcal{A}$ folgt i.A. nicht $\nu(T_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu(T)$. Nicht desto trotz kann gegebenfalls abgeschätzt werden

$$\nu(T) \leq C_\nu \cdot \varliminf_{n\to\infty} \nu(T_n) \quad , \quad \varlimsup_{n\to\infty} (T_n) \leq C_\nu \cdot \nu(T) \quad , \quad T \in \mathcal{A} \tag{3.5.14.1}$$

denn

$$\nu(T) \leq C_\nu \cdot [\nu(T - T_n) + \nu(T_n)] \quad \Rightarrow \quad \nu(T) \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} C_\nu \cdot \nu(T - T_n)}_{0} + C_\nu \cdot \varliminf_{n\to\infty} \nu(T_n)$$

$$\nu(T_n) \leq C_\nu \cdot \Big[\underbrace{\nu(T_n - T)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \nu(T)\Big] \quad \Rightarrow \quad \varlimsup_{n\to\infty} \nu(T_n) \leq C_\nu \cdot \nu(T)$$

Aus (3.5.14.1) ist zu erkennen, dass die Stetigkeit von ν auf $[\mathcal{A}, \nu]$ i.A. nur für $C_\nu = 1$ gesichert ist!

3.5.15 Beispiel einer unstetigen Quasinorm

Sei $\mathcal{L}$ das Operatorenideal aller beschränkten, linearen Operatoren auf allen Banachräumen und $\mathcal{L}^{(d)} \subseteq \mathcal{L}$ das Operatorenideal der approximierbaren Operatoren aus 3.5.11. Zu $C > 1$ definiere auf $\mathcal{L}$ die Quasinorm

$$\nu(T) := \begin{cases} \|T\| & : T \in \mathcal{L}^{(d)} \\ C \cdot \|T\| & : T \notin \mathcal{L}^{(d)} \end{cases}$$

mit Quasinormkonstante C. Dann ist ν unstetig bzgl. der eigenen, auf $[\mathcal{L}, \nu]$ erzeugten Topologie.

Erläuterung: Für Banachraum E mit $\dim E = \infty$ wähle $S \in \mathcal{L}^{(d)}(E)$. Dann ist für $\varepsilon > 0$ der Operator $(S + \varepsilon \operatorname{Id}_E)$ nicht-approximierbar und es geht einerseits

$$\nu(S + \varepsilon \operatorname{Id}_E - S) = |\varepsilon| \cdot \nu(\operatorname{Id}_E) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

anderseits jedoch

$$\nu(S + \varepsilon \operatorname{Id}_E) = C \cdot \|S + \varepsilon \operatorname{Id}_E\| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} C\,\|S\| = C \cdot \nu(S) \neq \nu(S)$$

3.5.16 Satz: Hinreichende Bedingung für p-Banachoperatorenideale

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ eine Teilklasse des Operatorenideals $\mathcal{L}$ über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$, sprich $\mathcal{A}(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)\ \forall\, E,F \in \mathscr{E}$, und $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ eine Funktion, so dass für ein $0 < p \leq 1$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathbb{K} \in \mathscr{E}, \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ und $\nu(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) = 1$ für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

2. Aus $T_1, T_2, ... \in \mathcal{A}(E,F),\ E,F \in \mathscr{E}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \nu^p(T_k) < \infty$ folgt
$$\exists\, T := \sum_{k=1}^{\infty} T_k \ \in \mathcal{A}(E,F)$$
und
$$\nu^p(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu^p(T_k)$$

3. $S \in \mathcal{L}(E_0, E),\ T \in \mathcal{A}(E,F),\ R \in \mathcal{L}(F, F_0),\ \ E,F \in \mathscr{E}$ impliziert
$$RTS \in \mathcal{A}(E_0, F_0) \quad \wedge \quad \nu(RTS) \leq \|R\| \cdot \nu(T) \cdot \|S\|$$

Dann ist $[\mathcal{A}, \nu]$ ein p-Banachoperatorenideal über die Klasse $\mathscr{E}$.

Beweis: Zu zeigen wären die Operatorenideal-Axiome 3.5.1(1,2) und Quasinorm-Axiome 3.5.2(1,2). Nach Bedingung (2) folgt für $S, T \in \mathcal{A}(E,F),\ E,F \in \mathscr{E}$ aus
$$\nu^p(S) + \nu^p(T) < \infty$$
auch $(S+T) \in \mathcal{A}(E,F)$ und
$$\nu^p(S+T) \leq \nu^p(S) + \nu^p(T)$$
Bedingungen (1) und (3) implizieren
$$(a \otimes x) = (1 \otimes x)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}(a \otimes 1) \in \mathcal{A}(E,F) \quad \forall\, a \in E',\ x \in F,\ E,F \in \mathscr{E}$$
und nach 3.5.5(4) sogar
$$\nu(a \otimes x) = \|a\| \cdot \|x\|$$
Daher ist $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal mit p-Norm ν. Zu zeigen bleibt nun die Vollständigkeit von $[\mathcal{A}, \nu]$. Ist $(S_n) \subseteq \mathcal{A}(E,F)$ eine ν-Cauchyfolge, so existiert Teilfolge $(S_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ mit
$$\nu(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}) \leq 2^{-\frac{k}{p}}$$
Setzt man $S_{n_0} := 0$ so gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^p(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$
und nach Bedingung (2)
$$\exists\, S := \sum_{k=0}^{\infty} (S_{n_{k+1}} - S_{n_k}) \ \in \mathcal{A}(E,F)$$
Doch
$$S - S_{n_N} = \underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} (S_{n_{k+1}} - S_{n_k})}_{\in \mathcal{A}(E,F)} \quad \forall\, N \in \mathbb{N}$$
bzw. nach (2)
$$\nu^p(S - S_{n_N}) \overset{(2)}{\leq} \sum_{k=N}^{\infty} \nu^p(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}) \leq \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-N+1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

sprich

$$S = \lim_{N\to\infty} {}_\nu S_{n_N}$$

Da (S_n) Cauchy war, gilt sogar

$$S = \lim_{n\to\infty} {}_\nu S_n$$

□

3.5.17 Hilfslemma: Normabschätzung für Operatorsummen

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ und ν eine Quasinorm mit Quasinormkonstante C_ν, dazu $0 < p \leq 1$ so dass $C_\nu = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Seien $S_i \in \mathcal{A}(E,F)$ und $k_i \in \mathbb{N}_0,\ i = 1,..,n$ so dass

$$\nu^p(S_i) \leq 2^{-k_i} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} \leq 1 \quad , \quad i = 1,..,n$$

Dann gilt auch die Abschätzung

$$\nu\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] \leq 1$$

Beweis: Induktion über $\varkappa := \max\{k_1,..,k_n\}$. Offensichtlich gilt die Aussage falls $\varkappa = 0$, da dann $n \leq 1$ sein muss. Gilt die Aussage für $\varkappa \leq k$, so genügt es zum Beweis für $\varkappa = k+1$ den Fall

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} = 1 \tag{3.5.17.1}$$

zu behandeln, da man ansonsten einfach $\varkappa \geq k_{n+1},..,k_m \in \mathbb{N}_0$ wählen kann mit

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-k_i} = 1$$

(vgl. Satz A.3.3(1)) und dazu $S_{n+1},..,S_m := 0$. Die Aussage gelte nun für die Fälle $\varkappa \leq k$, und sei $\varkappa = k+1$ mit (3.5.17.1). Die Menge

$$I := \{1 \leq i \leq n : k_i = \varkappa\}$$

besitzt nach A.3.3(2) eine gerade Anzahl von Indizes, o.B.d.A. $I = \{1,..,2r\}$. Setzt man nun

$$T_l := \begin{cases} S_{2l-1} + S_{2l} & : l \leq r \in I \\ S_{r+l} & : l > r \end{cases} \quad , \quad l = 1,..,n-r$$

so gilt zum einen die Darstellung

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \underbrace{S_1 + S_2}_{T_1} + \cdots + \underbrace{S_{2r-1} + S_{2r}}_{T_r} + \underbrace{S_{2r+1}}_{T_{r+1}} + \cdots + \underbrace{S_n}_{T_{n-r}} = \sum_{l=1}^{n-r} T_l$$

und zum anderen die Abschätzung

$$\nu^p(T_l) = \nu^p(S_{2l-1} + S_{2l}) \leq \underbrace{C_\nu^p}_{2^{1-p}} [\nu(S_{2l-1}) + \nu(S_{2l})]^p \leq 2^{1-p}\left[2^{-\frac{\varkappa}{p}} + 2^{-\frac{\varkappa}{p}}\right]^p = 2^{-(\varkappa-1)} \quad , \quad l = 1,..,r$$

sprich $\nu^p(T_l) \leq 2^{-h_l}$ für geeignete $h_1,..,h_{n-r} \in \mathbb{N}_0$ mit $\max\{h_1,..,h_{n-r}\} = \varkappa - 1$ und

$$\sum_{l=1}^{n-r} 2^{-h_l} = \underbrace{2^{-(\varkappa-1)} + \cdots + 2^{-(\varkappa-1)}}_{\times r} + 2^{-k_{2r+1}} + \cdots + 2^{-k_n} = 1$$

Nach Induktionsvoraussetzungen folgt dann

$$\nu\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = \nu\left[\sum_{l=1}^{n-r} T_l\right] \leq 1$$

□

Bemerke: p ist unmittelbar an die Quasinormkonstante C_ν gebunden!

3.5.18 Satz: Normabschätzung für Operatorsummen

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ und ν eine Quasinorm auf $\mathcal{A}$ mit Quasinormkonstante C_ν, dazu $0 < p \leq 1$ so dass $C_\nu = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Für $S_1, .., S_n \in \mathcal{A}(E, F),\ E, F \in \mathscr{E}$ gilt die Abschätzung

$$\nu^p \left[\sum_{i=1}^{n} S_i \right] \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \nu^p(S_i)$$

Beweis: O.B.d.A. seien $S_i \neq 0$. Setze

$$M := 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \nu^p(S_i)$$

und

$$T_i := \frac{S_i}{M^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad i = 1, .., n$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \nu^p(T_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \nu^p(S_i) = \frac{1}{2}$$

Wählen $k_i \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$2^{-k_i - 1} \leq \nu^p(T_i) \leq 2^{-k_i} \quad , \quad i = 1, .., n$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} = 2 \sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i - 1} \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \nu^p(T_i) = 1$$

folgt nach Hilfslemma 3.5.17

$$\nu^p \left[\sum_{i=1}^{n} S_i \right] = M \cdot \underbrace{\nu^p \left[\sum_{i=1}^{n} T_i \right]}_{\substack{\leq 1 \\ \text{nach } 3.5.17}} \leq M = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \nu^p(S_i)$$

was zu zeigen war. $\square$

3.5.19 Theorem zur Existenz einer äquivalenten p-Norm

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$ und ν eine Quasinorm auf $\mathcal{A}$ mit Quasinormkonstante C_ν, dazu $0 < p \leq 1$ so dass $C_\nu = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Dann existiert eine zu ν äquivalente p-Norm auf $\mathcal{A}$.

Beweis: Setzen

$$\nu_p(S) := \inf \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \nu^p(S_j) \right]^{\frac{1}{p}} : S = S_1 + \cdots + S_n,\ S_i \in \mathcal{A}(E, F),\ n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad S \in \mathcal{A}(E, F),\ E, F \in \mathscr{E} \tag{3.5.19.1}$$

und zeigen dass ν_p eine zu ν äquivalente p-Norm auf $\mathcal{A}$ ist. Dabei gilt:

- Für $S \in \mathcal{A}(E, F)$ gilt offensichtlich stets

$$\nu_p \leq \nu \tag{3.5.19.2}$$

- Für beliebige Darstellung $S = \sum_{j=1}^{n} S_j$ mit $S_j \in \mathcal{A}(E,F)$ gilt nach Satz 3.5.18 die Abschätzung

$$\nu^p(S) = \nu^p\left[\sum_{j=1}^{n} S_j\right] \overset{3.5.18}{\leq} 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \nu^p(S_j)$$

sprich

$$\nu(S) \leq \sqrt[p]{2} \cdot \nu_p(S) \tag{3.5.19.3}$$

- Für beliebige Darstellung $S = \sum_{j=1}^{n} S_j$ mit $S_j \in \mathcal{A}(E,F)$ kann man abschätzen

$$\|S\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|S_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(S) \overset{0<p\leq 1}{\leq} \left[\sum_{j=1}^{n} \nu^p(S_j)\right]^{\frac{1}{p}}$$

sprich

$$\|S\| \leq \nu_p(S) \tag{3.5.19.4}$$

Insbesondere kann man dann für $a \in E', x \in F$ abschätzen

$$\|a \otimes x\| \overset{(3.5.19.4)}{\leq} \nu_p(a \otimes x) \overset{(3.5.19.2)}{\leq} \nu(a \otimes x) = \|a \otimes x\|$$

das heißt $\nu_p(a \otimes x) = \|a \otimes x\|$. Für Darstellungen

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j \quad , \quad T = \sum_{j=1}^{m} T_j \quad , \quad S_j, T_j \in \mathcal{A}(E,F)$$

gilt per Konstruktion

$$\nu_p^p(S+T) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu^p(S_j) + \sum_{j=1}^{m} \nu^p(T_j)$$

bzw.

$$\nu_p^p(S+T) \leq \nu_p^p(S) + \nu_p^p(T)$$

Zu zeigen bleibt nun Axiom 3.5.2(3). Seien also

$$S \in \mathcal{L}(E_0, E),\ T \in \mathcal{A}(E,F),\ R \in \mathcal{L}(F, F_0) \quad , \quad E_0, E, F, F_0 \in \mathscr{E}$$

Dann kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
\nu_p(RTS) &= \inf\left\{\left[\sum_{j=1}^{n} \nu^p(U_j)\right]^{\frac{1}{p}} : RTS = \sum_{j=1}^{n} U_j,\ U_j \in \mathcal{A}(E_0, F_0),\ n \in \mathbb{N}\right\} \\
&\leq \inf\left\{\left[\sum_{j=1}^{n} \nu^p(RT_jS)\right]^{\frac{1}{p}} : T = \sum_{j=1}^{n} T_j,\ T_j \in \mathcal{A}(E,F),\ n \in \mathbb{N}\right\} \\
&\leq \inf\left\{\|R\| \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \nu^p(T_j)\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|S\| : T = \sum_{j=1}^{n} T_j,\ T_j \in \mathcal{A}(E,F),\ n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \|R\| \cdot \nu_p(T) \cdot \|S\|
\end{aligned}$$

□

Bemerke: Obiger Satz ist insbesondere auf einzelne Banachräume E mit Quasinorm ν anwendbar, mit (E,ν) als QBOI über die Klasse $\{E\}$ betrachtet. Doch selbst im Kontext des herkömmlichen Quasinormbegriffs auf einzelnen Banachräumen, verläuft obiger Beweis analog.

3.6 Spektrum & kompakte Operatoren

3.6.1 Definition: Resolventenmenge, Spektrum

Sei E ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$. Dann heißt

$$\rho(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \exists\ (\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1}\right\}$$

Resolventenmenge von T und

$$\operatorname{Spec}(T) := \sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \nexists\ (\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1}\right\}$$

Spektrum von T. Die Menge

$$\operatorname{Spec}_p(T) := \sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \operatorname{kernel}(\lambda \operatorname{Id} - T) \neq \{0\}\}$$

heißt *Punktspektrum* von T, deren Elemente *Eigenwerte* von T. Beachte dass

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$$

Zu Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt

$$\operatorname{Alg}_T(\lambda) := \dim \underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\operatorname{kernel}(\lambda \operatorname{Id} - T)^k}_{\substack{\text{wachsend} \\ \text{in } k}}}_{\text{linearer Raum}}$$

algebraische Vielfachheit und

$$\operatorname{Geom}_T(\lambda) := \dim \operatorname{kernel}(\lambda \operatorname{Id} - T)$$

geometrische Vielfachheit von λ.

Bemerkungen:

(i) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist stets $\operatorname{Geom}_T(\lambda) \leq \operatorname{Alg}_T(\lambda)$.

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda \in \sigma_p(T) \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Alg}_T(\lambda) \neq 0$.

(iii) Ist $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so ist $\operatorname{Geom}_T(\lambda) = \operatorname{Alg}_T(\lambda) \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$.

3.6.2 Definition: Kompakter Operator

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F heißt *kompakt* $:\Leftrightarrow$
$T(B_1(0_E))$ ist *präkompakt*, das heißt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\ y_1, .., y_n \in F : T(B_1(0_E)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)$$

Beispiele:

(i) Jeder finite Operator ist kompakt.

(ii) Der Operator $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, definiert durch

$$(Tf)(t) := \int_0^t f(s)\ ds \quad , \quad f \in \mathcal{C}[0,1]$$

ist kompakt [Arzelà–Ascoli].

(iii) Jeder approximierbare Operator ist kompakt.

3.6.3 Permanenzeigenschaften kompakter Operatoren

Seien E, F, G Banachräume.

1. Für kompakte $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ ist auch $(T + S)$ kompakt.
2. Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ kompakt und $S \in \mathcal{L}(F, G)$ ist auch ST kompakt.
3. Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ kompakt und $S \in \mathcal{L}(G, E)$ ist auch TS kompakt.
4. Sind $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$ kompakt und $T_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} T \in \mathcal{L}(E, F)$, so ist auch T kompakt.

Beweis:

1.
$$(T + S)(B_1(0_E)) \subseteq \underbrace{\underbrace{T(B_1(0_E))}_{\text{präkompakt}} + \underbrace{S(B_1(0_E))}_{\text{präkompakt}}}_{\text{Präkompakt nach A.1.5(3)}}$$

2. Präkompaktheit von $T(B_1(0_E))$ impliziert nach A.1.5(2) auch Präkompaktheit von $ST(B_1(0_E))$.
3. Da S beschränkt ist, ist
$$S(B_1(0_G)) \subseteq \|S\| \cdot B_1(0_E)$$
bzw.
$$TS(B_1(0_G)) \subseteq \|S\| \cdot T(B_1(0_E))$$
Doch da $T(B_1(0_E))$ präkompakt ist, ist nach A.1.5(1) auch $\|S\| \cdot T(B_1(0_E))$ präkompakt.
4. Ohne Beweis.

3.6.4 Satz über Operatoren mit kompakter Potenz

Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ Operator auf dem Banachraum E mit *kompakter Potenz*, sprich T^N sei kompakt für irgendein $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$
das heißt jedes Element $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ ist Eigenwert von T.
Ferner hat jeder Eigenwert $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$ endliche algebraische Vielfachheit: $\mathrm{Alg}_T(\lambda) < \infty$.

Beachte: Natürlich kann auch $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$ sein.

Konvention: Nach der Riesz-Theorie besteht das Punktspektrum $\sigma_p \setminus \{0\}$ höchstens aus einer abzählbaren Folge, die sich höchstens in Null häuft. Daher können wir folgende Konvention treffen: Jedem Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ mit kompakter Potenz sei eine Eigenwertfolge $(\lambda_n(T))$ wie folgt zugeordnet:

(i) Jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ wird so oft gezählt, wie seine algebraische Vielfachheit $\mathrm{Alg}_T(\lambda)$ angibt.

(ii) Die Eigenwerte werden nach fallenden Absolutbeträgen angeordnet:
$$|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \cdots \geq 0$$

(iii) Besitzt T nur n Eigenwerte, so setzen wir
$$\lambda_{n+1}(T) := \lambda_{n+2}(T) := \cdots := 0$$
und bekommen damit stets eine *unendliche* Eigenwertfolge.

3.6.5 Definition: Verwandte Operatoren

Zwei Operatoren $T \in \mathcal{L}(E),\ S \in \mathcal{L}(F)$ auf den normierten Räumen E, F heißen *verwandt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ A \in \mathcal{L}(E,F),\ B \in \mathcal{L}(F,E) : T = BA\ \wedge\ S = AB$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[rr, "\mathrm{T}"] \arrow[dr, "\mathrm{A}"'] & & \mathrm{E} \arrow[dr, "\mathrm{A}"] & \\
& \mathrm{F} \arrow[ur, "\mathrm{B}"'] \arrow[rr, "\mathrm{S}"'] & & \mathrm{F}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 6: Zur Definition verwandter Operatoren.

3.6.6 Prinzip der verwandten Operatoren [Sylvester, Pietsch]

Seien $T \in \mathcal{L}(E)$ und $S \in \mathcal{L}(F)$ verwandte Operatoren auf den Banachräumen E, F. Ist T ein Operator mit kompakter Potenz so ist auch S ein Operator mit kompakter Potenz und jeder Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ von T ist auch Eigenwert von S mit gleicher algebraischer Vielfachheit:

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(S) \setminus \{0\} \quad \wedge \quad \mathrm{Alg}_T(\lambda) = \mathrm{Alg}_S(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

Beweis: Seien $A \in \mathcal{L}(E,F),\ B \in \mathcal{L}(F,E)$ mit $T = BA$ und $S = AB$. Außerdem sei T^k kompakt für irgendein $k \in \mathbb{N}$. Wegen

$$S^{k+1} = A\,\overbrace{(BA)\dots(BA)}^{\times k}\,B = AT^kB$$

ist nach 3.6.3 auch S^{k+1} kompakt. Zu zeigen bleibt nun, dass

$$\dim \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(\lambda \operatorname{Id} - T)^k = \dim \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(\lambda \operatorname{Id} - S)^k$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da auch T/λ & S/λ verwandt sind, genügt es wegen

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(\underbrace{\lambda \operatorname{Id} - T}_{\lambda(\operatorname{Id} - T/\lambda)})^k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(\operatorname{Id} - T/\lambda)^k$$

den Fall $\lambda = 1$ zu behandeln, sprich es genügt zu zeigen, dass

$$\dim \mathcal{N}(\operatorname{Id} - T)^k = \dim \mathcal{N}(\operatorname{Id} - S)^k \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{$\clubsuit$}$$

Wegen

$$\operatorname{Id}_E - (\operatorname{Id}_E - T)^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} T^i = \left[\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} T^{i-1} B\right] A$$

und

$$\operatorname{Id}_F - (\operatorname{Id}_F - S)^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} S^i = A \left[\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} T^{i-1} B\right]$$

besitzt die Einschränkung $A : \mathcal{N}(\operatorname{Id}_E - T)^k \to \mathcal{N}(\operatorname{Id}_F - S)^k$ als Inverse den Operator

$$R := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} T^{i-1} B$$

und ist insbesondere Isomorph. Beachte dass tatsächlich $A : \mathcal{N}(\operatorname{Id}_E - T)^k \to \mathcal{N}(\operatorname{Id}_F - S)^k$ ist, denn

$$A(\operatorname{Id}_E - T)^k = (\operatorname{Id}_F - S)^k A$$

Da nach 3.6.4 die Nullräume $\mathcal{N}(\operatorname{Id} - T)^k,\ \mathcal{N}(\operatorname{Id} - S)^k$ endlich-dimensional sind, ist ($\clubsuit$) bzw. der Satz bewiesen. $\square$

Beispiel: Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zwei invertierbare Matrizen, so besitzen AB und BA gleiche Eigenwerte mit gleicher algebraischer Vielfachheit!

3.6.7 Satz: Invertierbarkeit und verwandte, kompakte Operatoren

Seien E, F Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E),\ S \in \mathcal{L}(F)$ kompakte, verwandte Operatoren. Dann ist $(\mathrm{Id}_E + T)$ genau dann invertierbar, wenn $(\mathrm{Id}_F + S)$ invertierbar ist.

Beweis: Folgt aus 3.6.4, 3.6.6 und der Definition von $\sigma(T)$.

3.6.8 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit [A. Pietsch, 1972]

Sei $[\mathcal{A}, \nu]$ ein quasi-Banachoperatorenideal (QBOI) über $\mathscr{E}_\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass für beliebigen Banachraum E die Komponente $\mathcal{A}(E) := \mathcal{A}(E, E)$ nur aus kompakten Operatoren besteht. Ferner gelte für ein geeignetes $r > 0$ stets die Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(T)|^r < \infty \quad \forall\, T \in \mathcal{A}(E),\ E \in \mathscr{E}_\mathbb{K}$$

wobei $(\lambda_j(T))_{j=1}^{\infty}$ die Eigenwertfolge von T sei (vgl. Konvention 3.6.4). Dann existiert eine Konstante $C \geq 1$ mit

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(T)|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \nu(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{A}(E),\ E \in \mathscr{E}_\mathbb{K}$$

Beweis durch Widerspruch: Sei $C_\nu \geq 1$ eine Quasinormkonstante von ν auf $\mathcal{A}$ (vgl. 3.5.2(2)) und es gelte

$$\forall\, C \geq 1 \ :\ \exists\, E \in \mathscr{E}_\mathbb{K},\ T \in \mathcal{A}(E) \ :\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(T)|^r\right]^{\frac{1}{r}} > C \cdot \nu(T)$$

Insbesondere existieren für $k \in \mathbb{N}$ Banachräume $E_k \in \mathscr{E}_\mathbb{K}$ und Operatoren $R_k \in \mathcal{A}(E_k)$ mit

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(R_k)|^r\right]^{\frac{1}{r}} > k \cdot (2C_\nu)^k \cdot \nu(R_k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Setzt man

$$T_k := \underbrace{\frac{(2C_\nu)^{-k}}{\nu(R_k)} \cdot R_k}_{\in \mathcal{A}(E_k)}$$

so gilt $\nu(T_k) = (2C_\nu)^{-k}$ und

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(T_k)|^r\right]^{\frac{1}{r}} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(2C_\nu)^{-k}}{\nu(R_k)} \cdot |\lambda_j(R_k)|\right]^r\right\}^{\frac{1}{r}} = \frac{(2C_\nu)^{-k}}{\nu(R_k)} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(R_k)|^r\right]^{\frac{1}{r}} > k \qquad (\clubsuit)$$

Betrachten nun den $\mathbb{K}$-Banachraum

$$l_1(\mathbf{E}) := l_1\left((E_j)_{j=1}^{\infty}\right) \ \in \mathscr{E}_\mathbb{K}$$

definiert wie in 3.2.10. Dann ist die Folge der Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} I_k T_k P_k \ :\ l_1(\mathbf{E}) \to l_1(\mathbf{E}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Cauchyfolge in $\mathcal{A}(l_1(\mathbf{E}))$, da für $n > m$:

$$\nu(S_n - S_m) = \nu\left[\sum_{k=1}^{m-n} I_{m+k}T_{m+k}P_{m+k}\right] \overset{3.5.2(2)}{\leq} \sum_{k=1}^{m-n} C_\nu^k \cdot \nu\left(I_{m+k}T_{m+k}P_{m+k}\right)$$

$$\overset{3.5.2(3)}{\leq} \sum_{k=1}^{m-n} C_\nu^k \cdot \underbrace{\|I_{m+k}\|}_{1} \cdot \nu(T_{m+k}) \cdot \underbrace{\|P_{m+k}\|}_{1} \leq \sum_{k=1}^{m-n} C_\nu^k \cdot \underbrace{\nu(T_{m+k})}_{(2C_\nu)^{-(m+k)}}$$

$$= (2C_\nu)^{-m} \sum_{k=1}^{m-n} 2^{-k} \leq (2C_\nu)^{-m} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}}_{1} = (2C_\nu)^{-m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Da $[\mathcal{A}, \nu]$ nach Voraussetzung vollständig ist, existiert der Grenzwert

$$T := \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} I_k T_k P_k \ \in \ \mathcal{A}(l_1(\mathbf{E}))$$

Wegen $P_k I_l = \delta_{kl} \operatorname{Id}_{E_k}$ gilt

$$T I_k = I_k T_k$$

bzw.

$$(\lambda \operatorname{Id} - T)^j I_k = I_k(\lambda \operatorname{Id} - T_k)^j \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Dementsprechend

$$\mathcal{N}(\lambda \operatorname{Id} - T_k)^j \subseteq \mathcal{N}\left[(\lambda \operatorname{Id} - T)^j I_k\right]$$

was zusammen mit der Injektivität von I_k impliziert

$$\dim \mathcal{N}(\lambda \operatorname{Id} - T_k)^j \leq \dim \mathcal{N}\left[(\lambda \operatorname{Id} - T)^j I_k\right] = \dim \mathcal{N}\left[(\lambda \operatorname{Id} - T)^j\right]$$

bzw.

$$\operatorname{Alg}_{T_k}(\lambda) = \dim \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}(\lambda \operatorname{Id} - T_k)^j \leq \dim \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}(\lambda \operatorname{Id} - T)^j = \operatorname{Alg}_T(\lambda) \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Können also die Eigenwertfolge $(\lambda_j(T_k))_{j=1}^{\infty}$ mit einer Teilfolge von $(\lambda_n(T))_{n=1}^{\infty}$ identifizieren und bekommen

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^r\right]^{\frac{1}{r}} \geq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(T_k)|^r\right]^{\frac{1}{r}} \overset{(\clubsuit)}{>} k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^r = \infty$$

ein Widerspruch zu $T \in \mathcal{A}(l_1(\mathbf{E}))$.

□

4 Spuren & Determinanten auf Operatorenidealen

4.1 Spuren

4.1.1 Definition: Spur

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$. Eine Abbildung

$$\tau : \bigcup_{E \in \mathscr{E}} \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C}$$

heißt *Spur* (*trace*), wenn für alle $\mathbb{K}$-Banachräume $E, F \in \mathscr{E}$ gilt:

1. $\tau(a \otimes x) = \langle x, a \rangle \quad \forall\ a \in E',\ x \in E$
2. $\tau(XT) = \tau(TX) \quad \forall\ T \in \mathcal{A}(E, F),\ X \in \mathcal{L}(F, E)$
3. $\tau(\alpha T + \beta S) = \alpha\tau(T) + \beta\tau(S) \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ S, T \in \mathcal{A}(E, E)$

Eine Spur auf einem p-Quasi-Banachoperatorenideal $[\mathcal{A}, \nu]$ heißt *stetig*, falls $\tau : \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C}$ auf allen Idealkomponenten $[\mathcal{A}(E), \nu]$ stetig ist.

4.1.2 Lemma: Charakterisierung stetiger Spuren

Sei $0 < p < \infty$ und $[\mathcal{A}, \nu]$ ein p-Quasi-Banachoperatorenideal über $\mathscr{E}_\infty$ ausgestattet mit der Spur τ. Dann ist τ genau dann stetig, wenn eine Konstante $C_\tau \geq 1$ existiert mit

$$|\tau(T)| \leq C_\tau \cdot \nu(T) \quad \forall\ T \in \mathcal{A}(E),\ E \in \mathscr{E}_\infty$$

Beweis durch Widerspruch: Richtung "$\Leftarrow$" ist klar. Sei also τ stetig und es gelte

$$\forall\ C \geq 1\ :\ \exists\ E \in \mathscr{E}_\infty,\ T \in \mathcal{A}(E)\ :\ |\tau(T)| > C \cdot \nu(T)$$

Dann existieren insbesondere Banachräume E_k und Operatoren $S_k \in \mathcal{A}(E_k),\ k \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau(S_k) > k^2 \cdot \nu(S_k)$$

Setzt man

$$T_k := (k\nu(S_k))^{-1} \cdot S_k$$

(beachte $\nu(S_k) > 0$) so gilt

$$\nu(T_k) = \frac{1}{k} \quad \wedge \quad |\tau(T_k)| > k$$

Definiert man nun den Banachraum

$$l_1(\mathbf{E}) := \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^\infty \in \mathop{\times}_{i=1}^\infty E_i : \sum_{i=1}^\infty \|x_i\| < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{x}\| := \sum_{i=1}^\infty \|x_i\| \quad , \quad \mathbf{x} \in l_1(\mathbf{E})$$

und dazu die Einbettungen $I_k : E_k \to l_1(\mathbf{E})$ bzw. Projektionen $P_k : l_1(\mathbf{E}) \to E_k$ wie im Beweis von 3.6.8, so sind $I_k T_k P_k \in \mathcal{A}(l_1(\mathbf{E}))$ und es gilt

$$\nu(I_k T_k P_k) \leq \underbrace{\|I_k\|}_{\leq 1} \cdot \nu(T_k) \cdot \underbrace{\|P_k\|}_{\leq 1} \leq \nu(T_k) = \frac{1}{k} \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

sprich

$$I_k T_k P_k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0_{l_1(\mathbf{E})}$$

Anderseits gehen

$$|\tau(I_k T_k P_k)| = |\tau(T_k \underbrace{P_k I_k}_{\mathrm{Id}})| = |\tau(T_k)| > k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

ein Widerspruch zur Stetigkeit von τ in der Null.
□

4.1.3 Hilfslemma zur Spur finiter Operatoren

Sei E ein Banachraum und $T \in \mathcal{F}(E)$ ein finiter Operator mit der Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \quad , \quad a_i \in E', \ y \in E$$

Dann ist

$$\operatorname{trace}(T) := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, a_i \rangle$$

unabhängig von der speziell gewählten Darstellung.

Beweis: Sei

$$T = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes y_j$$

eine weitere Darstellung von T und $z_1, .., z_N$ eine Basis von span $\{x_1, .., x_n, y_1, .., y_m\}$. Dann lässt sich jedes x_i, y_j darstellen gemäß

$$x_i = \sum_{k=1}^{N} x_i^k z_k \quad , \quad y_j = \sum_{k=1}^{N} y_j^k z_k$$

Daher

$$T = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} x_i^k a_i \otimes z_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} y_j^k b_j \otimes z_k$$

und analog zum Beweis in 3.4.4 folgt aus der linearen Unabhängigkeit der $\{z_k\}_{k=1}^N$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k a_i = \sum_{j=1}^{m} y_j^k b_j \quad , \quad k = 1, .., N \tag{$\clubsuit$}$$

Somit schließlich

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, a_i \rangle = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_k, x_i^k a_i \right\rangle \overset{(\clubsuit)}{=} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \left\langle z_k, y_j^k b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle y_j, b_j \rangle$$

$\square$

4.1.4 Satz zur Existenz einer Spur

Sei $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ das Operatorenideal der finiten Operatoren über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$. Dann gilt:

1. Auf $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ existiert genau eine Spur, die für

   $$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \mathcal{F}(E), \ E \in \mathscr{E}$$

   durch

   $$\operatorname{trace}(T) := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, a_i \rangle \tag{4.1.4.1}$$

   gegeben ist (vgl. Hilfslemma 4.1.3).

2. Für trace gilt die Spektralformel

   $$\operatorname{trace}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(T) \quad , \quad T \in \mathcal{F}(E), \ E \in \mathscr{E} \text{ komplex}$$

   wobei λ_i die Eigenwerte von $T \in \mathcal{F}(E)$ seien, entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt (vgl. Konvention 3.6.4).

Beweis:

1. **Spureigenschaft:** Zeigen zunächst dass trace tatsächlich eine Spur ist: Eigenschaften 4.1.1(1) & 4.1.1(3) sind klar. Zu

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \mathcal{F}(E,F) \quad , \quad S \in \mathcal{L}(F,E), \quad E,F \in \mathscr{E}$$

gilt

$$ST = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes Sx_i \quad , \quad TS = \sum_{i=1}^{n} (S'a_i) \otimes x_i$$

und somit auch Eigenschaft 4.1.1(2):

$$\operatorname{trace}(ST) = \sum_{i=1}^{n} \langle Sx_i, a_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, S'a_i \rangle = \operatorname{trace}(TS)$$

Eindeutigkeit: Folgt direkt aus den Spureigenschaften und Darstellungssatz 3.4.4 für finite Operatoren.

2. Sei

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

Zur Standardbasis $\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n$ auf $\mathbb{C}^n$ definiere die Abbildungen $\mathfrak{X} : E \to \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{B} : \mathbb{C}^n \to E$ durch

$$\mathfrak{X}x := \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i \rangle \cdot \mathbf{e}_i \quad , \quad x \in E$$

$$\mathfrak{B}\boldsymbol{\xi} := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot x_i \quad , \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n$$

Dann sind $T = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$ und $S := \mathfrak{X}\mathfrak{B} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ verwandt, wobei

$$S\boldsymbol{\xi} = \mathfrak{X}\mathfrak{B}\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{X} x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{n} \langle x_i, a_k \rangle \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, a_k \rangle \xi_i \right) \cdot \mathbf{e}_k \quad , \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n$$

sprich S wird bzgl. der Standardbasis durch die Matrix

$$S = (\langle x_i, a_k \rangle)_{k,i=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

dargestellt. Die Spektralformel für Matrizen (vgl. lineare Algebra) liefert

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x_j, a_j \rangle = \sum_i \lambda_i(S)$$

Da T, S verwandt sind, folgt nach Sylvester & Pietsch 3.6.6

$$\operatorname{trace}(T) = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, a_j \rangle = \sum_i \lambda_i(S) \overset{3.6.6}{=} \sum_i \lambda_i(T)$$

□

Beispiel: Für Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt der (finite) erzeugte Operator $T_M : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ die Darstellung

$$T_M = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes \mathbf{e}_j$$

wobei die $a_j \in (\mathbb{C}^n)'$ genau durch die Zeilen von M dargestellt werden. Man erhält so die bekannte Spurformel

$$\operatorname{trace}(T_M) = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{e}_j, a_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} M_{jj} = \underbrace{\operatorname{trace}(M)}_{\substack{\text{bekannte} \\ \text{Formel für} \\ \text{Matrizen}}}$$

4.1.5 Lemma: Spuren finiter Projektionen

Sei E ein Banachraum und $P \in \mathcal{F}(E)$ eine Projektion, sprich $P^2 = P$. Dann gilt

$$\mathrm{trace}(P) = \mathrm{rang}(P)$$

Beweis: Sei $n := \mathrm{rang}(P)$ und $x_1, .., x_n \in \mathrm{image}(P)$ eine Basis in $\mathrm{image}(P)$, dazu die eindeutig bestimmten, linear unabhängigen $a_1, .., a_n \in E'$ mit

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

(vgl. Darstellungssatz 3.4.4). Wegen

$$P^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i \otimes x_i) \circ (a_j \otimes x_j) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \langle x_j, a_i \rangle \cdot a_j \right] \otimes x_i$$

$$= P = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

folgt aufgrund der linearen Unabhängigkeit der $\{x_i\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x_j, a_i \rangle \cdot a_j = a_i \quad \forall\ i = 1, .., n$$

Da die $\{a_i\}$ linear unabhängig sind, muss $\langle x_j, a_i \rangle = \delta_{ij}$ sein. Nach Darstellung 4.1.4.1 folgt dann

$$\mathrm{trace}(T) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle x_i, a_i \rangle}_{1} = n$$

□

4.2 Determinanten

4.2.1 Definition: Determinante

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$. Eine Abbildung

$$\delta(\mathrm{Id} + \cdot) : \bigcup_{E \in \mathscr{E}} \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C}$$

heißt *Determinante*, falls für Banachräume $E, F \in \mathscr{E}$ folgende Eigenschaften gelten

1. $\delta(\mathrm{Id}_E + a \otimes x) = 1 + \langle x, a \rangle \quad \forall\ a \in E',\ x \in E$
2. $\delta(\mathrm{Id}_E + XT) = \delta(\mathrm{Id}_F + TX) \quad \forall\ T \in \mathcal{A}(E, F),\ X \in \mathcal{L}(F, E)$
3. $\delta\left[(\mathrm{Id}_E + S)(\mathrm{Id}_E + T)\right] = \delta(\mathrm{Id}_E + S) \cdot \delta(\mathrm{Id}_E + T) \quad \forall\ S, T \in \mathcal{A}(E)$
4. $\delta(\mathrm{Id}_E + zT)$ ist eine ganze Funktion im Parameter $z \in \mathbb{C}$ für jeden fixierten, komplexen Operator $T \in \mathcal{A}(E)$.

δ heißt *stetig* auf einem p-Quasi-Banachoperatorenideal $[\mathcal{A}, \nu]$, falls die Abbildung $T \mapsto \delta(\mathrm{Id} + T)$ auf jeder Komponente $[\mathcal{A}(E), \nu]$ stetig ist.

Spezialfall: Aus Eigenschaft (1) folgt $\det(\mathrm{Id} + T) = \mathrm{trace}(T)$ für jeden 1-dimensionalen Operator $T \in \mathcal{F}(E)$.

4.2.2 Hilfslemma zur Determinante finiter Operatoren

Sei E ein Banachraum und $F \in \mathcal{F}(E)$ ein finiter Operator mit der Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \quad , \quad a_i \in E',\ x_i \in E$$

Dann ist

$$\det(\mathrm{Id} + T) := \det\left(\delta_{ij} + \langle x_i, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n}$$

unabhängig von der speziell gewählten Darstellung von T.

Beweis: Sei

$$T = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes y_j \quad , \quad b_j \in E',\ y_i \in E$$

eine weitere Darstellung von T, dazu $z_1, .., z_N$ eine Basis in $\mathrm{span}\{x_1, .., x_n, y_1, .., y_m\}$. Analog zum Beweis von 4.1.3 kann geschrieben werden

$$x_i = \sum_{k=1}^{N} x_i^k z_k \quad , \quad y_j = \sum_{k=1}^{N} y_j^k z_k$$

für geeignete $x_i^k,\ y_j^k \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k a_i = \sum_{j=1}^{m} y_j^k b_j \quad , \quad k = 1, .., N \tag{4.2.2.1}$$

Interpretiert man $X := (x_i^k) \in \mathbb{C}^{N \times n}$, $Y := (y_j^k) \in \mathbb{C}^{N \times m}$ als Matrizen so erhält man

$$\det\left(\delta_{ij} + \langle x_i, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n} = \det\left(\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{N} x_i^k \langle z_k, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n} = \det\left(\mathrm{Id}_n + X^T \cdot \left(\langle z_k, a_j\rangle\right)_{k,j}\right)$$

$$\overset{A.1.7}{=} \det\left(\mathrm{Id}_m + \left(\langle z_k, a_j\rangle\right)_{k,j} \cdot X^T\right) = \det\left(\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \langle z_i, a_k\rangle x_k^j\right)_{i,j=1}^{m}$$

$$\overset{(4.2.2.1)}{=} \det\left(\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \langle z_i, b_k\rangle y_k^j\right)_{i,j=1}^{m} \overset{\text{analog}}{=} \det\left(\delta_{ij} + \langle y_i, b_j\rangle\right)_{i,j=1}^{m}$$

□

4.2.3 Satz zur Existenz einer Determinante

Sei $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ das Operatorenideal der finiten Operatoren über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$. Dann gilt:

1. Aus $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ existiert genau eine Determinante, die für

   $$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \ \in\ \mathcal{F}(E),\ E \in \mathscr{E}$$

   durch

   $$\det(\mathrm{Id}_E + T) := \det\left(\delta_{ij} + \langle x_i, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n}$$

   gegeben ist.

2. Für det gilt die Spektralformel

   $$\det(\mathrm{Id}_E + T) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \lambda_i(T))$$

   wobei λ_i die Eigenwerte von $T \in \mathcal{F}(E)$ seien, entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt (vgl. Konvention 3.6.4).

Beweis:

1. **Determinanteeigenschaft:**
   - Eigenschaft 4.2.1(1) folgt direkt aus der Definition.
   - Für
   $$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \ \in \mathcal{F}(E,F),\ X \in \mathcal{L}(F,E)\ ,\ E,F \in \mathscr{E}$$
   folgt wegen
   $$XT = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes X y_i \quad , \quad TX = \sum_{i=1}^{n} X' a_i \otimes y_i$$
   auch Eigenschaft 4.2.1(2):
   $$\det(\mathrm{Id}_E + XT) = \det\left(\delta_{ij} + \langle X y_i, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n} = \det\left(\delta_{ij} + \langle y_i, X' a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n} = \det\left(\mathrm{Id}_F + TX\right)$$
   - Für
   $$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \quad , \quad S = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes y_j \quad , \quad T,S \in \mathcal{F}(E),\ E \in \mathscr{E}$$
   gilt
   $$S + (\mathrm{Id} + S)T = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes y_j + \sum_{r=1}^{n} a_r \otimes \left(x_r + \sum_{l=1}^{m} \langle x_r, b_l\rangle\, y_l \right)$$
   und dementsprechend
   $$\det\left[(\mathrm{Id} + S)(\mathrm{Id} + T)\right] = \det\left[\mathrm{Id} + S + (\mathrm{Id} + S)T\right]$$
   $$= \det \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \langle y_i, b_j\rangle & \langle y_i, a_s\rangle \\ \langle x_r, b_j\rangle + \sum_{l=1}^{m} \langle x_r, b_l\rangle \langle y_l, b_j\rangle & \delta_{rs} + \langle x_r, a_s\rangle + \sum_{l=1}^{m} \langle x_r, b_l\rangle \langle y_l, a_s\rangle \end{pmatrix}_{\substack{i,r=1 \\ j,s=1}}^{\substack{m,n \\ m,n}}$$
   $$= \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & 0 \\ \langle x_r, b_l\rangle & \delta_{rq} + \langle x_r, a_q\rangle \end{pmatrix}_{\substack{i,r=1 \\ l,q=1}}^{\substack{m,n \\ m,n}} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{lj} + \langle y_l, b_j\rangle & \langle y_l, a_s\rangle \\ 0 & \delta_{qs} \end{pmatrix}_{\substack{l,q=1 \\ j,s=1}}^{\substack{m,n \\ m,n}}$$
   $$= \underbrace{\det\left(\delta_{rq} + \langle x_r, a_q\rangle\right)_{r,q=1}^{n}}_{\det(\mathrm{Id} + T)} \cdot \underbrace{\det\left(\delta_{lj} + \langle y_l, b_j\rangle\right)_{l,j=1}^{m}}_{\det(\mathrm{Id} + S)}$$
   so dass auch Eigenschaft 4.2.1(3) erfüllt ist.
   - Eigenschaft 4.2.1(4) ist klar, da $\det\left(\delta_{ij} + z\,\langle x_i, a_j\rangle\right)$ Polynom in z ist.

   Eindeutigkeit: Zu $T \in \mathcal{F}(E),\ E \in \mathscr{E}$ existiert nach 3.4.5 eine Darstellung
   $$T = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i \quad , \quad a_i \in E',\ y_i \in E$$
   so dass $\left(\langle x_i, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n}$ obere Dreiecksgestallt hat, sprich $\langle x_i, a_j\rangle = 0$ für $i > j$. Hieraus folgt leicht durch Induktion dass
   $$\mathrm{Id} + T = (\mathrm{Id} + a_1 \otimes x_1)\,(\mathrm{Id} + a_2 \otimes x_2) \cdot .. \cdot (\mathrm{Id} + a_n \otimes x_n)$$
   Für beliebige Determinante δ auf $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$ folgt damit
   $$\delta(\mathrm{Id} + T) \overset{4.2.1(3)}{=} \prod_{i=1}^{n} \delta(\mathrm{Id} + a_i \otimes x_i) \overset{4.2.1(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \langle x_i, a_i\rangle\right) = \det\left(\delta_{ij} + \langle x_i, a_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n} = \det(\mathrm{Id} + T)$$

2. Zu komplexen $E \in \mathscr{E}$ und finiten Operator $T \in \mathcal{F}(E)$ wähle Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \quad , \quad a_i \in E', \; x_i \in E$$

so dass $M := (\langle x_i, a_j \rangle)_{i,j=1}^{n}$ obere Dreiecksgestallt hat. Beachte dass T und der von M erzeugte Endomorphismus $T_M : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ verwand sind (vgl. Beweis 4.1.4(1)) und T_M die Eigenwerte $\{\langle x_i, a_i \rangle\}_{i=1}^{n}$ besitzt. Nach Sylvester & Pietsch 3.6.6 folgt daher:

$$\det(\mathrm{Id} + T) = \det\left(\delta_{ij} + \langle x_i, a_j \rangle\right)_{i,j=1}^{n} = \prod_{i=1}^{n} (1 + \langle x_i, a_i \rangle) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i(T_M)) \overset{(3.6.6)}{=} \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i(T))$$

□

4.2.4 Interpretation der Determinante für Matrizen

Zur Matrix $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sei $T_M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ der erzeugte Operator. Dann ist $\det(\mathrm{Id} + T_M)$ genau die *bekannte* Determinante $\det(1_{n \times n} + M)$.

Erläuterung: $(\mathrm{Id} + T_M)$ besitzt die Darstellung

$$\mathrm{Id} + T_M = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \otimes \mathbf{e}_i$$

wobei $\mu_i \in (\mathbb{K}^n)'$ genau durch die i-te Zeile von M repräsentiert wird. Dementsprechend

$$\det(\mathrm{Id} + T_M) = \det\left(\delta_{ij} + \underbrace{\langle \mathbf{e}_i, \mu_j \rangle}_{M_{ji}}\right)_{i,j=1}^{n} = \underbrace{\det(1_{n \times n} + M)}_{\substack{\text{bekannte} \\ \text{Formel für} \\ \text{Matrizen}}}$$

4.2.5 Lemma: Invertierbarkeit und Determinante eines finiten Operators

Sei $T \in \mathcal{F}(E)$ ein finiter Operator auf dem Banachraum E. Dann ist $(\mathrm{Id} + T) \in \mathcal{L}(E)$ genau dann invertierbar, wenn $\det(\mathrm{Id} + T) \neq 0$.

Beweis: Sei

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

eine Darstellung von T. Bekanntlich ist T verwandt mit dem von der Matrix

$$M := (\langle x_i, a_j \rangle)_{i,j=1}^{n} \quad \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

erzeugten Operator $T_M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Nach 3.6.7 ist $(\mathrm{Id} + T)$ genau dann invertierbar wenn $(\mathrm{Id} + T_M)$ invertierbar ist, bzw. genau dann wenn

$$\underbrace{\det(\mathrm{Id} + T_M)}_{\det(\mathrm{Id} + T)} \neq 0$$

□

4.2.6 Lemma über Differentiation von Matrizen-Determinanten

Ist $S(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ eine Familie invertierbarer Matrizen, differenzierbar im Parameter $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\frac{d}{dt} \det S = \operatorname{trace}\left(S^{-1} \dot{S}\right) \cdot \det(S)$$

Beweis: Wir schreiben
$$\det(S) = \det(S\mathbf{e}_1, .., S\mathbf{e}_n)$$
wobei $\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n$ die Standardbasis in $\mathbb{C}^n$ und $S\mathbf{e}_1, .., S\mathbf{e}_n$ die Spalten von S sind. Dann gilt
$$\frac{d}{dt}\det S = \det(\dot{S}\mathbf{e}_1, S\mathbf{e}_2, .., S\mathbf{e}_n) + \cdots + \det(S\mathbf{e}_1, .., S\mathbf{e}_{n-1}, \dot{S}\mathbf{e}_n)$$
und mit
$$\det(S\mathbf{e}_1, .., S\mathbf{e}_{k-1},\ \dot{S}\mathbf{e}_k,\ S\mathbf{e}_{k+1}, .., S\mathbf{e}_n) = \det\underbrace{(S\mathbf{e}_1, .., SS^{-1}\dot{S}\mathbf{e}_k, .., S\mathbf{e}_n)}_{S\cdot(\mathbf{e}_1, .., S^{-1}\dot{S}\mathbf{e}_k, .., \mathbf{e}_n)}$$
$$= \det(S)\cdot\det(\mathbf{e}_1, .., S^{-1}\dot{S}\mathbf{e}_k, .., \mathbf{e}_n) = \det(S)\cdot\left\langle S^{-1}\dot{S}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\right\rangle$$
schließlich
$$\frac{d}{dt}\det(S) = \det(S)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\langle S^{-1}\dot{S}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\right\rangle = \det(S)\cdot\operatorname{trace}(S^{-1}\dot{S})$$
□

4.2.7 Satz über Differentiation von Determinanten finiter Operatoren

Sei E ein Banachraum und $T(t) \in \mathcal{F}(E)$ eine Familie finiter Operatoren der Gestalt
$$T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\otimes x_i(t) \quad , \quad a_i(t)\in E',\ x_i(t)\in E$$
differenzierbar im reellen Parameter t. Ferner seien $(\operatorname{Id} + T(t))$ stets invertierbar. Dann gilt:
$$\frac{d}{dt}\det(\operatorname{Id}_E + T(t)) = \operatorname{trace}\left[(\operatorname{Id}_E + T(t))^{-1}\dot{T}(t)\right]\cdot\det(\operatorname{Id}_E + T(t))$$

Beweis: Zur Standardbasis $\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n$ und dualen $\mathbf{e}'_1, .., \mathbf{e}'_n \in (\mathbb{C}^n)'$ definiere die linearen, beschränkten Abbildungen
$$\mathfrak{X} := \sum_{i=1}^{n} a_i\otimes\mathbf{e}_i \ :\ E\to\mathbb{C}^n$$
$$\mathfrak{B} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}'_i\otimes x_i \ :\ \mathbb{C}^n\to E$$
Dann sind $T = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$ und $S := \mathfrak{X}\mathfrak{B}$ verwandt und es gilt
$$\det(\operatorname{Id} + T) = \det(\operatorname{Id} + S) \tag{4.2.7.1}$$
Wegen
$$\dot{T} = \dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{X}} \quad , \quad \dot{S} = \dot{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} + \mathfrak{X}\dot{\mathfrak{B}}$$
ferner
$$\operatorname{trace}(\dot{T}) = \underbrace{\operatorname{trace}(\dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{X})}_{\operatorname{trace}(\mathfrak{X}\dot{\mathfrak{B}})} + \underbrace{\operatorname{trace}(\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{X}})}_{\operatorname{trace}(\dot{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})} = \operatorname{trace}(\dot{S}) \tag{4.2.7.2}$$
Wegen $S\mathfrak{X} = \mathfrak{X}T$ und $\mathfrak{B}S = T\mathfrak{B}$ gilt
$$\mathfrak{X}(\operatorname{Id} + T)^{-1} = (\operatorname{Id} + S)^{-1}\mathfrak{X}$$
$$(\operatorname{Id} + T)^{-1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\operatorname{Id} + S)^{-1}$$

bzw.

$$T(\mathrm{Id}+T)^{-1}\dot{T} = \mathfrak{B}\mathfrak{T}(\mathrm{Id}+T)^{-1}\dot{T} = \mathfrak{B}(\mathrm{Id}+S)^{-1}\mathfrak{T}(\dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{T}+\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{T}})$$

und daher

$$\operatorname{trace}\left[T(\mathrm{Id}+T)^{-1}\dot{T}\right] = \operatorname{trace}\left[\mathfrak{B}(\mathrm{Id}+S)^{-1}\mathfrak{T}(\dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{T}+\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{T}})\right]$$

$$= \operatorname{trace}\left[\underbrace{\mathfrak{T}\mathfrak{B}}_{S}(\mathrm{Id}+S)^{-1}\mathfrak{T}\dot{\mathfrak{B}}\right] + \underbrace{\operatorname{trace}\left[\mathfrak{B}(\mathrm{Id}+S)^{-1}\underbrace{\mathfrak{T}\mathfrak{B}}_{S}\dot{\mathfrak{T}}\right]}_{\operatorname{trace}\left[(\mathrm{Id}+S)^{-1}S\dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{B}\right]}$$

$$= \operatorname{trace}\left[S(\mathrm{Id}+S)^{-1}\mathfrak{T}\dot{\mathfrak{B}}\right] + \operatorname{trace}\left[S(\mathrm{Id}+S)^{-1}\dot{\mathfrak{T}}\mathfrak{B}\right] = \operatorname{trace}\left[S(\mathrm{Id}+S)^{-1}\dot{S}\right]$$

Nach 4.2.6 also

$$\frac{d}{dt}\det(\mathrm{Id}+T) = \frac{d}{dt}\det(\mathrm{Id}+S) \overset{4.2.6}{=} \operatorname{trace}\left[\underbrace{(\mathrm{Id}+S)^{-1}}_{\mathrm{Id}-S(\mathrm{Id}+S)^{-1}}\cdot\dot{S}\right]\cdot\underbrace{\det(\mathrm{Id}+S)}_{\det(\mathrm{Id}+T)}$$

$$= \left[\underbrace{\operatorname{trace}(\dot{S})}_{\operatorname{trace}(\dot{T})} - \underbrace{\operatorname{trace}\left[S(\mathrm{Id}+S)^{-1}\dot{S}\right]}_{\operatorname{trace}\left[T(\mathrm{Id}+T)^{-1}\dot{T}\right]}\right]\cdot\det(\mathrm{Id}+T)$$

$$= \operatorname{trace}\left[\overbrace{(\mathrm{Id}+T)^{-1}}^{\mathrm{Id}-T(\mathrm{Id}+T)^{-1}}\cdot\dot{T}\right]\cdot\det(\mathrm{Id}+T)$$

Beachte dass nach 3.6.7 $(\mathrm{Id}+S)^{-1}$ genau dann existiert wenn auch $(\mathrm{Id}+T)^{-1}$ existiert.
□

5 Typische Operatorenideale

5.1 Integrale Operatoren

5.1.1 Definition: Integraler Operator

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F heißt *integral*, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert, mit

$$|\text{trace}(XT)| \leq C \cdot \|X\| \quad \forall\ X \in \mathcal{F}(F,E)$$

Man setzt

$$\mathcal{I}(E,F) := \{T \in \mathcal{L}(E,F) : T \text{ integral}\}$$

als die Klasse aller integralen Operatoren und führt für $T \in \mathcal{I}(E,F)$ die *Integralnorm*

$$I(T) := \inf\{C \geq 0 : |\text{trace}(XT)| \leq C \cdot \|X\| \ \ \forall\ X \in \mathcal{F}(F,E)\}$$

ein.

5.1.2 Satz: Darstellung der Integralnorm

Sei $T \in \mathcal{I}(E,F)$ ein integraler Operator zwischen den Banachräumen E, F mit Integralnorm $I(T)$. Dann gilt

$$I(T) = \sup\{|\text{trace}(XT)| : X \in \mathcal{F}(F,E),\ \|X\| \leq 1\}$$

und insbesondere

$$|\text{trace}(XT)| \leq I(T) \cdot \|X\| \quad \forall\ X \in \mathcal{F}(F,E)$$

Beweis: Nennen

$$A(T) := \sup\{|\text{trace}(XT)| : X \in \mathcal{F}(F,E),\ \|X\| \leq 1\}$$

Dann gilt offensichtlich

$$|\text{trace}(XT)| \leq A(T) \cdot \|X\| \quad \forall\ X \in \mathcal{F}(F,E)$$

und daher

$$I(T) \leq A(T)$$

Anderseits gilt per Konstruktion für jedes $\varepsilon > 0$

$$|\text{trace}(XT)| \leq [I(T) + \varepsilon] \cdot \|X\| \quad \forall\ X \in \mathcal{F}(F,E)$$

bzw.

$$A(T) \leq I(T) + \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

woraus schließlich

$$A(T) \leq I(T)$$

folgt.
□

5.1.3 Satz: Abschätzung der Integralnorm

Für integralen Operator $T \in \mathcal{I}(E,F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F gilt die Abschätzung

$$\|T\| \leq I(T)$$

Beweis: Zu $X = a \otimes x \in \mathcal{F}(F,E)$ gilt

$$\|X\| \cdot I(T) \geq |\text{trace}(XT)| = |\text{trace}(TX)| = |\text{trace}(a \otimes Tx)| = |\langle Tx, a\rangle|$$

bzw.

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|a\| \leq 1}} \underbrace{|\langle Tx, a\rangle|}_{\leq \|a\| \cdot \|x\| \cdot I(T)} \leq I(T)$$

□

5.1.4 Satz: Die integralen Operatoren als Banachoperatorenideal

Die Klasse $\mathcal{I}$ aller integralen Operatoren, ausgestattet mit der Integralnorm I, ist ein Banachoperatorenideal.

Beweis: Zeigen die Voraussetzungen des Satzes 3.5.16.

1. Für $X \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ gilt natürlich
$$|\operatorname{trace}(X \operatorname{Id}_{\mathbb{K}})| = |\operatorname{trace}(X)| = \|X\|$$
und daher $I(\operatorname{Id}_{\mathbb{K}}) = 1$.

2. Seien $T_1, T_2, .. \in \mathcal{I}(E, F)$ mit
$$\sum_{j=1}^{n} I(T_j) < \infty$$
Nach Lemma 5.1.3 ist die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} T_j$ bzgl. $\|\cdot\|$ absolut konvergent, besitzt also einen Grenzwert
$$T := \sum_{j=1}^{\infty} T_j \ \in \mathcal{L}(E, F)$$
Für jeden finiten Operator $X = \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes x_k \in \mathcal{F}(F, E)$ gilt dabei die Abschätzung
$$|\operatorname{trace}(XT)| = |\operatorname{trace}(TX)| = \left|\operatorname{trace}\left[\sum_{k=1}^{m} a_k \otimes T x_k\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} \langle T x_k, a_k\rangle\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} \langle T_j x_k, a_k\rangle\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} \langle T_j x_k, a_k\rangle\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m} \langle T_j x_k, a_k\rangle\right| = \sum_{j=1}^{\infty} |\operatorname{trace}(T_j X)| \leq \|X\| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} I(T_j)}_{<\infty}$$
das heißt $T \in \mathcal{I}(E, F)$ und $I(T) \leq \sum_{j=1}^{\infty} I(T_j)$.

3. Seien
$$S \in \mathcal{L}(E_0, E), \ T \in \mathcal{I}(E, F), \ R \in \mathcal{L}(F, F_0)$$
Dann gilt für $X \in \mathcal{F}(F_0, E_0)$
$$|\operatorname{trace}(XRTS)| = \left|\operatorname{trace}(\underbrace{SXR}_{\in \mathcal{F}(F,E)} T)\right| \leq I(T) \cdot \|SXR\| \leq I(T) \cdot \|S\| \cdot \|R\| \cdot \|X\|$$
sprich
$$I(RTS) \leq \|R\| \cdot I(T) \cdot \|S\|$$

Nach 3.5.16 folgt schließlich die Behauptung.
□

5.1.5 Satz: Maximalität der integralen Operatoren

Sei $[\mathcal{A}, \nu]$ ein QBOI und τ eine stetige Spur auf $\mathcal{A}$. Dann gilt
$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$$
Umformuliert: Die integralen Operatoren sind das größte QBOI dass eine stetige Spur besitzen könnte.

Bemerke: Es stellt sich dennoch heraus, dass $[\mathcal{I}, I]$ keine stetige Spur besitzt!

Beweis: Nach 4.1.2 existiert eine Konstante $C \geq 1$ so dass für $S \in \mathcal{A}$ gilt $|\tau(S)| \leq C \cdot \nu(S)$. Insbesondere folgt dann für $T \in \mathcal{A}(E, F)$:

$$|\text{trace}(XT)| \leq C \cdot \nu(XT) \leq C \cdot \nu(T) \cdot \|X\| \quad \forall\ X \in \mathcal{F}(F, E)$$

sprich

$$T \in \mathcal{I}(E, F) \quad , \quad I(T) \leq C \cdot \nu(T)$$

□

5.2 p-Nukleare Operatoren

5.2.1 Definition: p-Nuklearer Operator

Sei $0 < p \leq 1$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F heißt *p-nuklear* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ (a_n) \subseteq E',\ (y_n) \subseteq F \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \otimes y_n\|^p < \infty \quad \wedge \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes y_n$$

Dazu sei

$$\mathfrak{N}_p(E, F) := \{T \in \mathcal{L}(E, F) : T \ p\text{-nuklear}\}$$

die Menge aller p-nuklearen Operatoren. Zu $T \in \mathfrak{N}_p(E, F)$ heißt

$$N_p(T) := \inf \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \otimes y_n\|^p \right]^{\frac{1}{p}} \ : \ T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes y_n,\ (a_n) \subseteq E',\ (y_n) \subseteq F \right\}$$

p-Nuklearnorm von T.

5.2.2 Satz: Abschätzung der p-Nuklearnorm

Sei $0 < p \leq 1$. Für p-nuklearen Operator $T \in \mathfrak{N}_p(E, F)$ zwischen zwei Banachräumen E, F gilt die Abschätzung

$$\|T\| \leq N_p(T)$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existieren $(a_n) \subseteq E',\ (y_n) \subseteq F$ mit

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes y_n \quad , \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p \, \|y_n\|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq N_p(T) + \varepsilon$$

Für $x \in E,\ b \in F'$ gilt ferner

$$|\langle Tx, b\rangle| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, a_n\rangle \, \langle y_n, b\rangle \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n\rangle \, \langle y_n, b\rangle| \leq \|x\| \cdot \|b\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \cdot \|b_n\|$$

$$\overset{p \leq 1}{\leq} \|x\| \cdot \|b\| \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p \, \|y_n\|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x\| \cdot \|b\| \cdot [N_p(T) + \varepsilon]$$

das heißt nach Hahn-Banach

$$\|T\| \leq N_p(T) + \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

bzw.

$$\|T\| \leq N_p(T)$$

□

5.2.3 Satz: Die p-nuklearen Operatoren als p-Banachoperatorenideal

Sei $0 < p \leq 1$. Die Klasse $[\mathfrak{N}_p, N_p]$ aller p-nuklearen Operatoren, ausgestattet mit der p-Nuklearnorm, ist ein p-Banachoperatorenideal.

Beweis: Zeigen die Bedingungen (1), (2), (3) aus Satz 3.5.16.

1. Offensichtlich ist $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{N}_p(\mathbb{K})$ und es gilt
$$1 = \|\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}\| \overset{5.2.2}{\leq} N_p(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \leq (\|1\|^p \cdot \|1\|^p)^{\frac{1}{p}} = 1$$

2. Seien $T_1, T_2, .. \in \mathfrak{N}_p(E,F)$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} N_p^p(T) < \infty$. Wegen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| \overset{5.2.2}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} N_p^p(T_n) < \infty$$
existiert der Grenzwert
$$T := \sum_{n=1}^{\infty} T_n \ \in \mathcal{L}(E,F)$$
Zu $\varepsilon > 0$ wählen Darstellung
$$T_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \otimes y_{nj}$$
mit
$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_{nj}\|^p \, \|y_{nj}\|^p \leq (1+\varepsilon) N_p^p(T_n)$$
Wegen der Darstellung
$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \underbrace{\sum_{n,j=1}^{\infty} a_{nj} \otimes y_{nj}}_{\substack{\text{absolut} \\ \text{konvergent}}}$$
und
$$\sum_{n,j=1}^{\infty} \|a_{nj}\|^p \, \|y_{nj}\|^p \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} N_p^p(T_n) < \infty$$
folgt $T \in \mathfrak{N}_p(E,F)$ und
$$N_p^p(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} N_p^p(T_n)$$

3. Seien $T \in \mathfrak{N}_p(E,F),\ S \in \mathcal{L}(E_0,F)$ und $R \in \mathcal{L}(E,F_0)$. Für $\varepsilon > 0$ existiert eine Darstellung $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \otimes y_n$ mit
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p \, \|y_n\|^p \leq (1+\varepsilon) N_p^p(T)$$
Ferner lässt sich schreiben
$$RTS = \sum_{n=1}^{\infty} S'a_n \otimes Ry_n$$
wobei
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S'a_n\|^p \, \|Ry_n\|^p \leq \underbrace{\|S'\|^p}_{\|S\|^p} \cdot \|R\|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p \, \|y_n\|^p \leq (1+\varepsilon) N_p^p(T) \cdot \|S\|^p \cdot \|R\|^p$$
das heißt
$$N_p^p(RTS) \leq (1+\varepsilon) N_p^p(T) \, \|S\|^p \cdot \|R\|^p \quad \forall\, \varepsilon > 0$$
bzw.
$$N_p(RTS) \leq \|R\| \cdot N_p(T) \cdot \|S\|$$

Nach Satz 3.5.16 ist $[\mathfrak{N}_p, N_p]$ ein p-Banachoperatorenideal.
□

5.2.4 Minimalität der p-Nuklearen Operatoren

Sei $0 < p \leq 1$. Das p-BOI $[\mathfrak{N}_p, N_p]$ ist das kleinste p-Banachoperatorenideal, das heißt, ist $[\mathcal{A}, \nu]$ ein p-BOI so gilt $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathcal{A}$. Ferner gilt dann $\nu \leq N_p$.

Beweis: Zu zeigen wäre, dass ein p-nuklearer Operator $T \in \mathfrak{N}_p(E, F)$ in jedem p-BOI $[\mathcal{A}, \nu]$ enthalten ist mit $\nu(T) \leq N_p(T)$. Für $\varepsilon > 0$ existieren $(a_n) \subseteq E',\ (y_n) \subseteq F$ mit

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes y_n \quad , \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p \|y_n\|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq N_p(T) + \varepsilon$$

Die Operatoren

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes y_k \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

bilden in $[\mathcal{A}, \nu]$ eine Cauchyfolge, denn für $\delta > 0$ existiert stets ein $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu^p(T_n - T_m) = \nu^p\left[\sum_{k=m+1}^{n} a_k \otimes y_k\right] \leq \sum_{k=m+1}^{n} \nu^p(a_k \otimes y_k) = \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\|^p \|y_k\|^p \leq \delta^p \quad \forall\ n > m \geq n_\delta$$

Da $[\mathcal{A}, \nu]$ vollständig ist, ist $T \in \mathcal{A}(E, F)$ und es gilt

$$\nu^p(T - T_m) \leq \varepsilon^p \quad \forall\ m \geq n_\varepsilon$$

für genügend großes $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Folglich

$$\nu^p(T) \leq \nu^p(T - T_{n_\varepsilon}) + \nu^p(T_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon^p + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \nu^p(a_k \otimes y_k) = \varepsilon^p + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \|a_k\|^p \cdot \|y_k\|^p \leq \varepsilon^p + (N_p(T) + \varepsilon)^p \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

bzw.

$$\nu^p(T) \leq N_p^p(T)$$

□

Bemerkung: Im Fall $p = 1$ heißen die 1-nuklearen Operatoren einfach nukleare Operatoren und man schreibt $[\mathfrak{N}, N]$ statt $[\mathfrak{N}_1, N_1]$. Der obige Satz besagt, dass die nuklearen Operatoren das kleinste Banachoperatorenideal bilden, d.h. ist $[\mathcal{A}, \nu]$ ein BOI, so gilt $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{A}$ und sogar $\nu \leq N$.

Eine wichtige Charakterisierung der p-nuklearen Operatoren ist der folgende Faktorisierungssatz.

5.2.5 Faktorisierungssatz für p-nukleare Operatoren

Sei $0 < p \leq 1$ und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein Operator zwischen den Banachräumen E, F. Dann ist $T \in \mathfrak{N}_p(E, F) \Leftrightarrow \exists\ S \in \mathcal{L}(E, l_\infty),\ R \in \mathcal{L}(l_1, F)$ und Diagonaloperator $D_\sigma \in \mathcal{L}(l_\infty, l_1)$ mit $\sigma \subseteq l_p$ so dass $T = RD_\sigma S$ (vgl. 3.2.2), das heißt T faktorisiert über einen Diagonaloperator von $l_\infty \to l_1$. Ferner gilt

$$N_p(T) = \inf\left\{\|R\|\, \|\sigma\|_p\, \|S\| : T = RD_\sigma S\right\}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \\ l_\infty \arrow[r, "D_\sigma"'] & l_1 \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung 7: Zur Faktorisierung eines p-nuklearen Operators $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

6 Die Operator-KdV-Gleichung (OKdV)

6.1 Lösungen der Operator-KdV-Gleichung

6.1.1 Satz: Lösung der OKdV

Seien $A, B \in \mathcal{L}(E)$ Operatoren auf dem Banachraum E, dazu

$$L(t,x) := e^{xA+tA^3}B \quad , \quad t, x \in \mathbb{R}$$

Existiert die Inverse $(\mathrm{Id} + L)^{-1}$, so ist

$$V(t,x) := (\mathrm{Id} + L)^{-1}(AL + LA) \quad , \quad t, x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der integrierten OKdV

$$\partial_t V = \partial_x^3 V + 3(\partial_x V)^2 \tag{6.1.1.1}$$

Erläuterung: Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id} + L)^{-1} = \mathrm{Id} - L(\mathrm{Id} + L)^{-1} = \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} + L)^{-1}L \\
&\partial_x L = AL \quad , \quad \partial_t L = A^3 L \\
&\partial_x(\mathrm{Id} + L)^{-1} = -(\mathrm{Id} + L)^{-1}(\partial_x L)(\mathrm{Id} + L)^{-1}
\end{aligned}$$

erhält man

$$\partial_x V = (\mathrm{Id} + L)^{-1}AV$$

$$\partial_x^2 V = 2 \cdot (\mathrm{Id} + L)^{-1}A(\mathrm{Id} + L)^{-1}AV - (\mathrm{Id} + L)^{-1}A^2 V$$

$$\partial_x^3 V = 6 \cdot \left[(\mathrm{Id} + L)^{-1}A\right]^3 V - 3 \cdot (\mathrm{Id} + L)^{-1}A(\mathrm{Id} + L)^{-1}A^2 V + (\mathrm{Id} + L)^{-1}A^3 V - 3 \cdot (\mathrm{Id} + L)^{-1}A(\mathrm{Id} + L)^{-1}AV$$

$$(\partial_x V)^2 = (\mathrm{Id} + L)^{-1}A(\mathrm{Id} + L)^{-1}A^2 V - 2 \cdot \left[(\mathrm{Id} + L)^{-1}A\right]^3 V + (\mathrm{Id} + L)^{-1}A^2(\mathrm{Id} + L)^{-1}AV$$

$$\partial_t V = (\mathrm{Id} + L)^{-1}A^3 V$$

und sieht dass (6.1.1.1) erfüllt ist.
□

6.2 Lösungen der (skalaren) KdV

6.2.1 Satz über Lösung der KdV durch eindimensionale Operatoren

Sei $V = a \otimes c(t,x)$ eine Familie eindimensionaler Operatoren auf dem Banachraum E ($a \in E'$: const, $c(t,x) \in E$) die die integrierte OKdV

$$\partial_t V = \partial_x^3 V + 3(\partial_x V)^2$$

erfüllen. Dann erfüllt

$$v(t,x) := \mathrm{trace}(V(t,x)) = \langle c(t,x),\ a\rangle$$

die skalare, integrierte KdV

$$\partial_t v = \partial_x^3 v + 3(\partial_x v)^2$$

Beweis: Beginnend mit der Voraussetzung

$$a \otimes \partial_t c = a \otimes \partial_x^3 c + 3(a \otimes \partial_x c)^2 = a \otimes \partial_x^3 c + 3 \langle \partial_x c, a \rangle \, a \otimes \partial_x c$$

erhält man durch Spurbildung

$$\underbrace{\langle \partial_t c, a \rangle}_{\partial_t \langle c,a \rangle} = \underbrace{\langle \partial_x^3 c, a \rangle}_{\partial_x^3 \langle c,a \rangle} + 3 \underbrace{\langle \partial_x c, a \rangle}_{\partial_x \langle c,a \rangle} \langle \partial_x c, a \rangle$$

□

6.2.2 Theorem: Lösungen der KdV durch Spurbildung

Seien $A, B \in \mathcal{L}(E)$ Operatoren auf dem Banachraum E mit $\operatorname{rang}(AB + BA) = 1$, dazu

$$L(t,x) := e^{xA + tA^3} B$$

Existiert die Inverse $(\mathrm{Id} + L)^{-1}$, so ist

$$v := \operatorname{trace}\left[(\mathrm{Id} + L)^{-1} (AL + LA) \right] =$$

Lösung der skalaren, integrierten KdV

$$\partial_t v = \partial_x^3 v + 3 \cdot (\partial_x v)^2$$

Ist sogar $B \in \mathcal{F}(E)$ finit, so besitzt v die Darstellung

$$v = 2 \cdot \frac{\partial_x \det(\mathrm{Id} + L)}{\det(\mathrm{Id} + L)} \tag{6.2.2.1}$$

Beweis: Die Operatorfamilie

$$V(t,x) = (\mathrm{Id} + L)^{-1}(AL + LA) = \underbrace{(\mathrm{Id} + L)^{-1} e^{xA + tA^3}}_{=:S(t,x)} (AB + BA)$$

erfüllt nach Satz 6.1.1 die integrierte OKdV. Wegen $\operatorname{rang}(AB + BA) = 1$, existieren $a \in E'$, $c_0 \in E$ mit $(AB + BA) = a \otimes c_0$, sprich

$$V(t,x) = a \otimes S(t,x) c_0$$

Nach 6.2.1 ist daher $v := \operatorname{trace}(V)$ Lösung der integrierten KdV. Ist ferner $B \in \mathcal{F}(E)$ finit, so ist es auch L und wir können schreiben

$$\operatorname{trace}(V) = \operatorname{trace}\left[(\mathrm{Id} + L)^{-1} AL \right] + \underbrace{\operatorname{trace}\left[(\mathrm{Id} + L)^{-1} LA \right]}_{\operatorname{trace}[L(\mathrm{Id} + L)^{-1} A]} = 2 \operatorname{trace}\left[(\mathrm{Id} + L)^{-1} \underbrace{AL}_{\partial_x L} \right] \overset{4.2.7}{=} 2 \cdot \frac{\partial_x \det(\mathrm{Id} + L)}{\det(\mathrm{Id} + L)}$$

□

Beispiel: Zu beliebigem Banachraum E und eindimensionaler Projektion $P \in \mathcal{F}(E)$ setze $A := \alpha \, \mathrm{Id}_E$ und $B := \beta P$, dazu

$$L(t,x) := e^{xA + tA^3} B = e^{\alpha x + \alpha^3 t} \beta P$$

Wegen $\operatorname{rang}(AB + BA) = 1$ erfüllt

$$v = \operatorname{trace}\left[(\mathrm{Id} + L)^{-1} (AL + LA) \right]$$

nach 6.2.2 die integrierte KdV und nimmt wegen

$$\det(\mathrm{Id} + L) = \det\left(\mathrm{Id} + e^{\alpha x + \alpha^3 t} \beta P \right) = 1 + e^{\alpha x + \alpha^3 t} \beta \cdot \underbrace{\operatorname{trace}(P)}_{\substack{1 \\ \text{nach } 4.1.5}}$$

die schon bekannte Gestalt

$$v = 2 \cdot \frac{\partial_x \det(\mathrm{Id} + L)}{\det(\mathrm{Id} + L)} = \frac{2al}{1 + l} \quad , \quad l(t,x) := e^{\alpha x + \alpha^3 t} \beta$$

an (vgl. (2.1.2.2)).

Problem: Zu klären wäre, unter welchen Bedingungen an $A \in \mathcal{L}(E)$, für alle $a \in E$, $c \in E$ ein Operator $B \in \mathcal{L}(E)$ existiert mit

$$AB + BA = a \otimes c$$

Wissenswert wäre dabei, zu welchem Operatorenideal $\mathcal{A}$ der Operator B grundsätzlich gehört bzw. welches Eigenwertverhalten er besitzt.

6.2.3 Satz über den Antikommutator [Schechter, Eschmeier, Aden]

Sei $[\mathcal{A}, \nu]$ ein Banachoperatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$, $A \in \mathcal{L}(E)$ ein Operator auf $E \in \mathscr{E}$ und $\mathscr{A} : \mathcal{A}(E) \to \mathcal{A}(E)$ definiert durch

$$\mathscr{A}(T) := AT + TA \quad , \quad T \in \mathcal{A}(E)$$

Dann gilt

$$\sigma(\mathscr{A}) = \sigma(A) + \sigma(A) := \{\lambda + \mu : \lambda, \mu \in \sigma(A)\}$$

Folgerung: $\mathscr{A}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(A) + \sigma(A)$. Gegebenfalls ist dann

$$AB + BA = \underbrace{a \otimes c}_{\in \mathcal{A}(E)}$$

für jedes $a \in E', c \in E$ eindeutig nach B gemäß

$$B = \mathscr{A}^{-1}(a \otimes c)$$

auflösbar (vgl. Bedingung (2.2.3.1) an die Eigenwerte von A in Hirotas Lösung 2.2.3). Beachte dass die finiten Operatoren kein Banachoperatorenideal bilden können, daher B auch nicht unbedingt finit ist!

6.2.4 Bemerkung zu den Freiheitsgraden der Lösung im Matrizenfall

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so dass $0 \notin \mathrm{Spec}(A) + \mathrm{Spec}(A)$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so dass $\mathrm{rang}(AB + BA) = 1$, dazu

$$L(t, x) := e^{xA + tA^3} B$$

wie in 6.2.2. Dann kann man sich bei der Darstellung von $\det(\mathrm{Id} + L)$ auf Matrizen mit Jordan-Gestalt beschränken, das heißt

$$\det(\mathrm{Id} + L) = \det\left(\mathrm{Id} + e^{xJ + tJ^3} \mathcal{J}^{-1}(a \otimes c)\right)$$

für geeignete $a, c \in \mathbb{C}^n$ und Jordan-Matrix $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wobei

$$\mathcal{J} : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}^{n \times n} \quad , \quad \mathcal{J}(X) := JX + XJ$$

Insbesondere hängen dann die durch A & B erzeugten Lösungen (6.2.2.1) der integrierten KdV in Wirklichkeit nur von höchstens $3n$ *freien Parametern* ab, nämlich jeweils n für a, c und J!

Erläuterung: Die Matrix A ist stets ähnlich zu einer Jordan-Matrix $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sprich $A = T^{-1} J T$ für geeignete, invertierbare $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Insbesondere nimmt der Operator

$$\mathscr{A} : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}^{n \times n} \quad , \quad \mathscr{A}(X) := AX + XA$$

die Gestalt

$$\mathscr{A}(X) = T^{-1} J T X + X T^{-1} J T$$

an, sprich

$$T \mathscr{A}(X) T^{-1} = J(TXT^{-1}) + (TXT^{-1}) J$$

Definiert man nun analog für J den Antikommutator

$$\mathcal{J} : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}^{n \times n} \quad , \quad \mathcal{J}(X) := JX + XJ$$

so erhält man

$$T\mathscr{A}(X)T^{-1} = \mathcal{J}(TXT^{-1}) \tag{6.2.4.1}$$

Da J und A die gleichen Spektra besitzen, ist nach Schechter, Eschmeier, Aden 6.2.3

$$\mathscr{A} \text{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \notin \underbrace{\mathrm{Spec}(A)}_{\mathrm{Spec}(B)} + \underbrace{\mathrm{Spec}(A)}_{\mathrm{Spec}(B)} \Leftrightarrow \ \mathcal{J} \ \text{ invertierbar}$$

und man erhält aus (6.2.4.1)

$$T^{-1}\mathcal{J}^{-1}(T\underbrace{\mathscr{A}(X)}_{=:Y}T^{-1})T = X$$

bzw.

$$T^{-1}\mathcal{J}^{-1}(TYT^{-1})T = \mathscr{A}^{-1}(Y) \quad \forall\ Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Ferner

$$e^{xA+tA^3}\mathscr{A}^{-1}(Y) = T^{-1}e^{xJ+tJ^3}TT^{-1}\mathcal{J}^{-1}\left(TYT^{-1}\right)T = T^{-1}e^{xJ+tJ^3}\mathcal{J}^{-1}(TYT^{-1})T \tag{6.2.4.2}$$

Speziell für $\mathrm{rang}(AB+BA) = 1$, sprich $AB + BA = \alpha \otimes \gamma$ für irgendwelche $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}^n$ und dementsprechend

$$B = \mathscr{A}^{-1}(\alpha \otimes \gamma)$$

ergibt sich

$$\det\left(\mathrm{Id} + e^{xA+tA^3}B\right) \overset{(6.2.4.2)}{=} \det\left(\mathrm{Id} + T^{-1}e^{xJ+tJ^3}\mathcal{J}^{-1}(T(\alpha\otimes\gamma)T^{-1})T\right)$$

$$\overset{A.1.7}{=} \det\left[\mathrm{Id} + e^{xJ+tJ^3}\mathcal{J}^{-1}\big(\underbrace{(T^{-1})'\alpha}_{=:a} \otimes \underbrace{T\gamma}_{=:c}\big)\right]$$

Spezialfall: Im Spezialfall

$$A = \mathrm{diag}(-k_1, .., -k_n) \quad , \quad k_i + k_j \neq 0 \quad \forall\ i,j$$

und $a, c \in \mathbb{C}^n$, dazu $B := \mathscr{A}^{-1}(a \otimes c)$, ergibt sich bekanntlich

$$\det\Big(1 + \underbrace{e^{xA+tA^3}B}_{L}\Big) \overset{2.2.3}{=} \det\left[\delta_{ij} + e^{-xk_i - tk_i^3}\frac{a_j c_i}{k_i + k_j}\right]_{i,j=1}^{n} = \det\left(\mathrm{Id} + D_c S D_a\right) \overset{A.1.7}{=} \det\Big(\mathrm{Id} + \underbrace{D_a D_c}_{D_d} S\Big)$$

wobei

$$D_a := \mathrm{diag}(a_1, .., a_n),\ D_c := \mathrm{diag}(c_1, .., c_n),\ D_d := \mathrm{diag}(\underbrace{a_1c_1}_{=:d_1}, .., \underbrace{a_nc_n}_{=:d_n})$$

$$S := \left(\frac{e^{-xk_i - tk_i^3}}{k_i + k_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Zu erkennen ist: Für feste $k_1, .., k_n$ hängt $\det(\mathrm{Id} + L)$ nur noch von den n Parametern $d_i := a_i c_i$ ab.

7 Funktionale zur Lösung der KdV

Wie schon in 2.2.1 angedeutet, findet der Übergang von Lösungen der integrierten OKdV

$$\partial_t V = \partial_x^3 V + 3 \cdot (\partial_x V)^2 \quad , \quad V(t,x) \in \mathcal{A}(E),\ E : \text{Banachraum}$$

im Operatorenideal $\mathcal{A}$ zu Lösungen der skalaren, integrierten KdV über geeignet konstruierte, lineare, stetige Funktionale $\tau : \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C}$ statt:

$$\partial_t \tau(V) \overset{!}{=} \partial_x^3 \tau(V) + 3 \cdot (\partial_x \tau(V))^2$$

Entscheidend dabei ist, dass $\tau : (\mathcal{A}(E), \circ) \to (\mathbb{C}, \cdot)$ (bedingt) homomorph ist, sprich

$$\tau(T^2) = \tau(T) \cdot \tau(T) \tag{7.0.4.3}$$

für alle relevanten $T \in \mathcal{A}(E)$. Je nach Operatorenideal $\mathcal{A}$ kann dies nur bedingt möglich sein.

7.1 Bedingt homomorphe Funktionale

7.1.1 Satz über bedingt homomorphe Funktionale auf $\mathcal{F}$

Seien E ein Banachraum und $\tau : \mathcal{F}(E) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional, $\tau \neq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\forall\ s \in \mathcal{F}(E) : \text{rang}(s) = 1 \ \Rightarrow\ \tau(s^2) = \tau(s)^2$
2. $\forall\ p \in \mathcal{F}(E) : p^2 = p,\ \text{rang}(p) = 1 \ \Rightarrow\ \tau(p) = 1$
3. $\forall\ a \in E',\ x \in E : \tau(a \otimes x) = \langle x, a \rangle$ (vgl. Spur 4.1.4)

Beweis:

1 → 2: Beweis durch Widerspruch. Es gelte (1) und es existiere 1-dimensionale Projektion $a_0 \otimes x_0 =: p_0 \in \mathcal{F}(E)$, sprich

$$\text{rang}(p_0) = 1,\ p_0^2 = p_0$$

mit $\tau(p_0) \neq 1$. Wegen

$$\tau(p_0) = \tau(p_0^2) \overset{(1)}{=} \tau(p_0)^2$$

muss $\tau(p_0) = 0$ sein.
Behauptung: Für $a \in E'$ gilt stets $\tau(a \otimes x_0) = 0$.
Beweis: Tatsächlich

$$\tau(a \otimes x_0) = \underbrace{\tau(a_0 \otimes x_0)}_{0} + \underbrace{\tau(\underbrace{(a - a_0) \otimes x_0}_{\text{Nilpotent}})}_{0} = 0$$

wobei verwendet wurde dass wegen (1) gilt: $\tau(s) = 0$ für jegliches nilpotente[5] $s \in \mathcal{F}(E)$.
Behauptung: Für jegliche 1-dimensionale Projektion $p \in \mathcal{F}(E)$ ist $\tau(p) = 0$.
Beweis: Sei $p = a \otimes x,\ a \in E',\ x \in E$. Im Fall $x \in \text{span}\{x_0\}$ ist die Aussage schon gezeigt. Für $x \notin \text{span}\{x_0\}$, sprich $x_0 \notin \text{span}\,\{x - x_0\}$ existiert nach Hahn-Banach A.1.1 ein Funktional $\widetilde{a} \in E'$ mit

$$\langle x - x_0, \widetilde{a} \rangle = 0 \ \wedge\ \langle x_0, \widetilde{a} \rangle = 1$$

und daher $\langle x, \widetilde{a} \rangle = 1$. Wegen

$$\tau\big(\underbrace{(\widetilde{a} - a) \otimes x}_{\text{nilpotent}}\big) = 0$$

gilt

$$\tau(a \otimes x) = \tau(\widetilde{a} \otimes x) = \tau(\underbrace{\widetilde{a} \otimes x_0}_{0}) + \underbrace{\tau(\underbrace{\widetilde{a} \otimes (x - x_0)}_{\text{nilpotent}})}_{0} = 0$$

[5] Ein Operator $s \in \mathcal{L}(E)$ heißt *nilpotent*, falls $s^n = 0$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

(beachte $\langle x, a\rangle = 1$ wegen $p^2 = p$).
Behauptung: $\tau = 0$ auf $\mathcal{F}(E)$.
Beweis: Es genügt $\tau(a \otimes x) = 0 \quad \forall\, a \in E',\ x \in E$ zu zeigen. Im Falle $\langle x, a\rangle = 0$ ist $a \otimes x$ nilpotent und daher die Behauptung trivial. Im Fall $\langle x, a\rangle =: \varkappa \neq 0$ gilt

$$\tau(a \otimes x) = \varkappa \cdot \tau\Big(\underbrace{a \otimes \tfrac{x}{\varkappa}}_{\text{Projektion}} \Big) = 0$$

Doch $\tau = 0$ ist nach Satzvoraussetzungen ausgeschlossen.

2 → 3: Sei $0 \overset{\text{o.B.d.A.}}{\neq} s := a \otimes x,\ a \in E',\ x \in E$, dazu $b \in E'$ mit $\langle x, b\rangle = 1$ (vgl. Hahn-Banach A.1.2). Dann ist $p := b \otimes x$ eine 1-dimensionale Projektion.
Im Falle $\langle x, a\rangle = 0$ ist $(s + p)$ eine 1-dimensionale Projektion, denn

$$(s+p)^2 = ((a+b) \otimes x)^2 = \underbrace{\langle x, a+b\rangle}_{1} \cdot (s+p)$$

und daher

$$1 \overset{(2)}{=} \tau(s+p) = \tau(s) + \underbrace{\tau(p)}_{1}$$

sprich $\tau(s) = 0 = \langle x, a\rangle$.
Im Falle $\langle x, a\rangle \neq 0$ ist

$$p := \frac{a \otimes x}{\langle x, a\rangle}$$

eine 1-dimensionale Projektion und es gilt $\tau(p) = 1$ bzw. $\tau(a \otimes x) = 0$.

3 → 1: Für $a \in E',\ x \in E$ gilt

$$\tau((a \otimes x)^2) = \tau\left(\langle x, a\rangle \cdot a \otimes x\right) \overset{(3)}{=} \langle x, a\rangle \cdot \langle x, a\rangle \overset{(3)}{=} \tau(a \otimes x)^2$$

□

7.1.2 Folgerungen über bedingt homomorphe Funktionale

Sei E ein Banachraum.

1. Jedes lineare Funktional $\tau : \mathcal{F}(E) \to \mathbb{C},\ \tau \neq 0$ mit einer der Eigenschaften aus 7.1.1 ist genau die Spur auf $\mathcal{F}(E)$.

2. Ist $\dim(E) > 1$ und $\tau : \mathcal{F}(E) \to \mathbb{C}$ linear mit

$$\tau(s^2) = \tau(s)^2 \quad \forall\, s \in \mathcal{F}(E)$$

so ist $\tau = 0$.

Beweis:

1. Klar nach 7.1.1.

2. Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\tau(s^2) = \tau(s)^2 \quad \forall\, s \in \mathcal{F}(E)$ und $\tau \neq 0$. Dann muss nach 7.1.1 $\tau = \operatorname{trace}$ sein. Wählen nun linear unabhängige $x_1, x_2 \in E$ und dazu duale $a_1, a_2 \in E'$ mit $\langle x_i, a_j\rangle = \delta_{ij}$ (vgl. Hahn-Banach). Dann ist $p := a_1 \otimes x_1 + a_2 \otimes x_2$ Projektion und es gilt

$$2 \overset{4.1.5}{=} \operatorname{trace}(p) = \operatorname{trace}(p^2) = \operatorname{trace}(p)^2 \overset{4.1.5}{=} 4$$

ein Widerspruch!

□

7.2 Operatorenideale & Lösungen der KdV

7.2.1 Theorem zur Realisierung von Lösungen der OKdV

Sei $[\mathcal{A},\nu]$ ein Quasi-Banachoperatorenideal über $\mathscr{E}$ und $\tau:\mathcal{A}(E)\to\mathbb{C}$ ein lineares, stetiges Funktional auf der Idealkomponente $\mathcal{A}(E),\ E\in\mathscr{E}$ mit der Eigenschaft

$$\forall\ S\in\mathcal{A}(E),\ \operatorname{rang}(S)=1\quad:\quad \tau(S^2)=\tau(S)^2$$

Dann gilt:

1. Für eine $\mathcal{A}(E)$-wertige Lösung $V=V(t,x)$ der integrierten OKdV
$$\partial_t V=\partial_x^3 V+3\cdot(\partial_x V)^2$$
mit $\operatorname{rang}(\partial_x V)=1$, ist $\tau(V)$ Lösung der skalaren, integrierten KdV.
2. Ist $\tau\neq 0$ auf $\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$, so ist $\tau\big|_{\mathcal{F}_{\mathscr{E}}}=\operatorname{trace}$ (vgl. 4.1.4).
3. Ist $[\mathcal{A},\nu]$ ein approximatives Quasi-Banachoperatorenideal und $\tau\neq 0$ auf $\mathcal{A}$, so ist τ eine Spur.

Beweis:

1. Nach Voraussetzung gilt $\tau((\partial_x V)^2)=\tau(\partial_x V)^2$ und
$$\partial_t\tau(V)\overset{\text{Stet.}}{=}\tau(\partial_t V)=\tau\left[\partial_x^3 V+3\cdot(\partial_x V)^2\right]\overset{\text{Lin.}}{=}\tau(\partial_x^3 V)+3\cdot\underbrace{\tau\left((\partial_x V)^2\right)}_{\tau(\partial_x V)^2}\overset{\text{Stet.}}{=}\partial_x^3\tau(V)+3\cdot(\partial_x\tau(V))^2$$
2. Direkte Folgerung des Satzes 7.1.1(1).
3. Da $\mathcal{F}$ bzgl. ν dicht ist in $\mathcal{A}$ und τ bzgl. ν stetig, muss auch $\tau\big|_{\mathcal{F}_{\mathscr{E}}}\neq 0$ sein, nach (2) also $\tau\big|_{\mathcal{F}_{\mathscr{E}}}=\operatorname{trace}$. Zu zeigen bliebe, dass τ die Spureigenschaften (1), (2), (3) auch auf ganz $\mathcal{A}$ erfüllt. Linearität ist klar, und für $a\in E',x\in E,\ E\in\mathscr{E}$ ohnehin
$$\tau(a\otimes x)=\operatorname{trace}(a\otimes x)=\langle x,a\rangle$$
Ist nun $T\in\mathcal{A}(E,F)$ und $X\in\mathcal{L}(F,E)$ so existiert eine Folge $(T_n)\subseteq\mathcal{F}(E,F)$ mit $T_n\overset{n\to\infty}{\underset{\nu}{\longrightarrow}}T$. Nach Abschätzungseigenschaft (3) von ν gehen dann auch $T_nX\overset{n\to\infty}{\underset{\nu}{\longrightarrow}}TX$ bzw. $XT_n\overset{n\to\infty}{\underset{\nu}{\longrightarrow}}XT$. Aufgrund der Stetigkeit von τ bzgl. ν schließlich
$$\tau(XT)\overset{n\to\infty}{\longleftarrow}\tau(XT_n)=\underbrace{\operatorname{trace}(XT_n)}_{\operatorname{trace}(T_nX)}=\tau(T_nX)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\tau(TX)$$
sprich $\tau(XT)=\tau(TX)$.

□

Beachte:

(i) Jegliche Ableitungen in der OKdV sind bzgl. der Quasinorm ν zu verstehen! Besitzt V die Struktur
$$V(t,x)=(\operatorname{Id}+L)^{-1}(AL+LA)\quad,\quad L(t,x):=e^{xA+tA^3}B$$
(vgl. 6.1.1) mit $B\in\mathcal{A}(E)$ (z.B. finit), so kann man zerlegen
$$V(t,x)=T(t,x)\underbrace{B}_{\in\mathcal{A}(E)}+S(t,x)\underbrace{BA}_{\in\mathcal{A}(E)}$$
und V besitzt nach Lemma A.2.2 bzgl. ν die gleichen Ableitungen wie bzgl. $\|\cdot\|$. Ist insbesondere V Lösung der OKdV bzgl. $\|\cdot\|$, so ist sie es auch bzgl. ν.

(ii) Die Voraussetzung der Approximativität von $[\mathcal{A},\nu]$ in (3) ist notwendig. Tatsächlich existiert ein QBOI $[\mathcal{A},\nu]$ und stetiges, lineares Funktional $0\neq\tau:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ mit $\tau\big|_{\mathcal{F}}=0$ [N. Kalton].

Beispiele:

(i) Das approximative QBOI aus 3.5.11 besitzt **keine** Spur.

(ii) Sei $0 < p \leq 1$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $[\mathfrak{N}_p(\mathcal{H}), N_p]$ der p-Banachraum der p-nuklearen Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (vgl. 3.5.4). Dann definiert

$$\tau(T) := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, a_i \rangle \quad , \quad T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes x_i \in \mathfrak{N}_p(\mathcal{H}) \tag{7.2.1.1}$$

eine stetige Spur auf $[\mathfrak{N}_p(\mathcal{H}), N_p]$.

(iii) Seien E, F beliebige Banachräume, dazu $[\mathfrak{N}_p(E, F), N_p]$ der p-Banachraum der p-nuklearen Operatoren in $\mathcal{L}(E, F)$ (vgl. 3.5.4). Dann kann gezeigt werden:

- Für $\frac{2}{3} < p \leq 1$ existiert auf $\mathfrak{N}_p$ **keine** Spur.
- Für $0 < p \leq \frac{2}{3}$ existiert auf $\mathfrak{N}_p$ stets eine Spur.

A Anhang

A.1 Funktionalanalysis

A.1.1 Das Hahn-Banach Theorem

Sei E ein normierter Raum und $E_0 \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum. Ist $a_0 \in E_0'$ eine stetige Linearform auf E_0, so kann a_0 normerhaltend auf E fortgesetzt werden, sprich, es existiert eine stetige Linearform a auf E mit

(i) $\langle x, a \rangle = \langle x, a_0 \rangle \quad \forall\ x \in E_0$, das heißt $a\,|_{E_0} = a_0$.

(ii) $\|a\| = \|a_0\|$

A.1.2 Folgerungen des Hahn-Banach-Theorems

Ist E ein normierter Raum, so gilt

1. Zu $x \in E \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in E'$ mit $\langle x, a \rangle = c$ und $\|a\| = \frac{|c|}{\|x\|}$.
2. Für beliebiges $x \in E$ ist

$$\|x\| = \sup_{\substack{a \in E' \\ \|a\| \leq 1}} |\langle x, a \rangle|$$

A.1.3 Satz zur kanonischen Einbettung auf endlich-dimensionalen Räumen

Sei E ein $\mathbb{K}$-Banachraum mit $\dim E =: n < \infty$. Dann ist die kanonische Einbettung

$$K_E : E \to E''$$

bijektiv.

Beweis: Injektivität ist in 3.3.4 nachgewiesen worden. Sei $\mathfrak{B} : \mathbb{K}^n \to E$ Isomorph, dann ist nach 3.3.5(6) auch der duale

$$\mathfrak{B}' : E' \to (\mathbb{K}^n)'$$

Isomorph bzw.

$$\mathfrak{B}'' : (\mathbb{K}^n)'' \to E''$$

isomorph. Sei $b \in E''$, dann existiert bekanntlich $x \in \mathbb{K}^n$ mit $K_{\mathbb{K}^n} x = (\mathfrak{B}'')^{-1} b$. Schließlich folgt $K_E(\mathfrak{B}x) = b$, denn

$$\langle a, K_E \mathfrak{B} x \rangle = \langle \mathfrak{B} x, a \rangle = \left\langle x, \mathfrak{B}' a \right\rangle = \left\langle \mathfrak{B}' a, K_{\mathbb{K}^n} x \right\rangle = \left\langle a, \mathfrak{B}'' K_{\mathbb{K}^n} x \right\rangle = \langle a, b \rangle \quad \forall\ a \in E'$$

$\square$

A.1.4 Lemma über Linearformen

Sei E Banachraum und $a_1, .., a_n \in E'$, $n < \dim E$ beliebige Linearformen. Dann existiert ein $0 \neq x \in E$ mit $\langle x, a_k \rangle = 0 \quad \forall\ 1 \leq k \leq n$.

Beweis: Wähle n linear unabhängige $x_1, .., x_n \in E$ und definiere den finiten Operator

$$T := \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes x_k$$

Wegen $\operatorname{rang}(T) \leq n$ muss $\dim \operatorname{kernel}(T) > 0$ sein, sprich es existiert ein $0 \neq x \in \operatorname{kernel}(T)$:

$$0 = Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle \cdot x_k$$

Da die x_k linear unabhängig sind, muss $\langle x, a_k \rangle = 0 \quad \forall\ k$ gelten. $\square$

A.1.5 Satz über präkompakte Mengen

Sei E ein normierter Raum und $\Omega \subseteq E$ eine präkompakte Menge.

1. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch $\lambda\Omega$ präkompakt.
2. Ist F ebenfalls ein normierter Raum und $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so ist auch das Bild $T(\Omega) \subseteq F$ präkompakt.
3. Ist $\widetilde{\Omega} \subseteq E$ eine weitere präkompakte Menge, so ist auch

$$\Omega + \widetilde{\Omega} := \left\{\omega + \widetilde{\omega} : \omega \in \Omega,\ \widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}\right\}$$

   präkompakt.

Beweis:

1. Sei o.B.d.A. $\lambda \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, dazu $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon / |\lambda|$. Dann ist

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\widetilde{\varepsilon}}(x_j)$$

   für geeignete $x_1, .., x_n \in E$. Daher

$$\lambda \cdot \Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \lambda \cdot B_{\widetilde{\varepsilon}}(x_j) = \bigcup_{j=1}^{n} B_{|\lambda|\widetilde{\varepsilon}}(\lambda x_j) = \bigcup_{j=1}^{n} B_{\varepsilon}(\lambda x_j)$$

2. Sei o.B.d.A. $\|T\| \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, dazu $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon / \|T\|$. Dann ist

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\widetilde{\varepsilon}}(x_j)$$

   für geeignete $x_1, .., x_n \in E$ und daher

$$T(\Omega) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} T\left(B_{\widetilde{\varepsilon}}(x_j)\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\|T\|\cdot\widetilde{\varepsilon}}(Tx_j) = \bigcup_{j=1}^{n} B_{\varepsilon}(Tx_j)$$

3. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\Omega, \widetilde{\Omega}$ präkompakt sind, existieren $x_1, .., x_n$ und $\widetilde{x}_1, .., \widetilde{x}_m$ so dass

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \quad , \quad \widetilde{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\widetilde{x}_j)$$

   und somit

$$(\Omega + \widetilde{\Omega}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} \underbrace{\left[B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) + B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\widetilde{x}_k)\right]}_{\subseteq B_{\varepsilon}(x_j + \widetilde{x}_k)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} B_{\varepsilon}(x_j + \widetilde{x}_k)$$

□

A.1.6 Satz über lineare Unabhängigkeit von Grenzwerten

Sei E ein Banachraum und $(y_{k1})_{k=1}^{\infty}, ..., (y_{k_n})_{k=1}^{\infty} \subseteq E$ Folgen mit

$$y_{ki} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} y_i \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

für irgendwelche $\{y_i\}_{i=1}^{n} \subseteq E$. Sind die $\{y_{ki}\}_{i=1}^{n}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ linear abhängig, so sind es auch $\{y_i\}_{i=1}^{n}$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Voraussetzung ein $k \in \mathbb{N}$ groß genug so dass

$$\|y_{ki} - y_i\| \leq \frac{\varepsilon}{n} \tag{A.1.6.1}$$

und Skalare $\alpha_{k1}, .., \alpha_{kn} \in \mathbb{K}$ mit $(\alpha_{k1}, .., \alpha_{kn}) \neq (0, .., 0)$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} y_{ki} = 0 \tag{A.1.6.2}$$

Dabei kann o.B.d.A. angenommen werden $|\alpha_{ki}| \leq 1 \quad \forall\ i$ und $\alpha_{ki_k} = 1$ für irgendein i_k, so dass abgeschätzt werden kann

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} y_i\right\| \overset{(A.1.6.2)}{=} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(y_{ki} - y_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ki}| \cdot \|y_{ki} - y_i\| \overset{(A.1.6.1)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ki}| \frac{\varepsilon}{n} \overset{|\alpha_{ki}| \leq 1}{\leq} \varepsilon$$

Haben also Folge

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} y_i \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

gefunden, mit $\alpha_{ki_k} = 1$ für geeignete $1 \leq i_k \leq n$. Da für irgendein $i \in \{1, .., n\}$ unendlich oft mal $\alpha_{ki} = 1$ sein wird, kann o.B.d.A. angenommen werden das stets $\alpha_{k1} = 1$ ist. Haben also Folge

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{n} \alpha_{ki} y_i}_{\in \operatorname{span}\{y_2, .., y_n\}} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} -y_1$$

gefunden. Doch da $\operatorname{span}\{y_2, .., y_n\}$ als endlich-dimensionaler Unterraum abgeschlossen ist, muss $y_1 \in \operatorname{span}\{y_2, .., y_n\}$ sein.
□

A.1.7 Lemma über Matrizendeterminanten

Seien $M \in \mathbb{K}^{m \times n},\ n \in \mathbb{K}^{n \times m}$ beliebige Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann gilt:

$$\det(\operatorname{Id}_m + MN) = \det(\operatorname{Id}_n + NM)$$

Beweis: Wegen

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m & M \\ -N & \operatorname{Id}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m & 0 \\ N & \operatorname{Id}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m + MN & M \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m & 0 \\ N & \operatorname{Id}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m & M \\ -N & \operatorname{Id}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m & M \\ 0 & \operatorname{Id}_n + NM \end{pmatrix}$$

gilt

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m + MN & M \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{pmatrix}}_{\det(\operatorname{Id}_m + MN)} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_m & M \\ 0 & \operatorname{Id}_n + NM \end{pmatrix}}_{\det(\operatorname{Id}_n + NM)}$$

□

A.2 Bemerkungen zu Ableitungen bzgl. unterschiedlicher Normen

A.2.1 Lemma: Ableitung bzgl. äquivalenter Normen

Sei E ein Banachraum und F bzgl. zweier Quasinormen ν, μ Banachraum. Ferner gelte $\nu \leq C \cdot \mu$ für irgendeine Konstante $C > 0$. Ist die Abbildung $f : E \to F$ in $x \in E$ bzgl. μ differenzierbar, so ist sie es auch bzgl. ν und beide Ableitungen sind gleich.

Beweis: Sei f in $x \in E$ differenzierbar mit Ableitung f' bzgl. μ, sprich

$$f(x+h) = f(x) + f'h + r(h) \quad , \quad h \in E$$

für irgendein Restglied $r : E \to F$ mit

$$\lim_{\|h\| \to 0} \mu \left[\frac{r(h)}{\|h\|} \right] = 0$$

Nach Voraussetzung geht dann auch

$$\lim_{\|h\| \to 0} \nu \left[\frac{r(h)}{\|h\|} \right] = 0$$

sprich f' ist auch Ableitung von f bzgl. ν.
□

A.2.2 Lemma: Spezielle Ableitungen in QBOI

Sei $[\mathcal{A}, \nu]$ ein Quasi-Banachoperatorenideal über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$, E irgendein Banachraum und $F \in \mathscr{E}$.

1. Ist $f : E \to \mathcal{A}(F)$ in $x \in E$ bzgl. ν differenzierbar, so ist sie auch bzgl. $\|\cdot\|$ differenzierbar und die Ableitungen stimmen überein.
2. Ist $f : E \to \mathcal{L}(F)$ in $x \in E$ bzgl. $\|\cdot\|$ differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f' \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F))$ und $T \in \mathcal{A}(F)$, so ist
$$f(\cdot)T : E \to \mathcal{A}(F)$$
in $x \in E$ bzgl. ν differenzierbar mit Ableitung $f'(\cdot)T \in \mathcal{L}(E, \mathcal{A}(F))$.
Analoges gilt auch für die Linksanwendung von T.

Beweis:

1. Bekanntlich gilt auf $\mathcal{A}(F)$ die Abschätzung $\|\cdot\| \le \nu(\cdot)$. Nach Lemma A.2.1 folgt dann die Behauptung.
2. Die Verknüpfung $f(\cdot)T$ kann als Verkettung von $f : E \to \mathcal{L}(F)$ und
$$[\mathcal{L}(F), \|\cdot\|] \to [\mathcal{A}(E), \nu] \quad , \quad S \mapsto ST$$
abgesehen werden. Letztere ist natürlich überall differenzierbar und besitzt in $f(x)$ die Ableitung
$$h \mapsto hT \quad , \quad h \in \mathcal{L}(F)$$
Daher besitzt $f(\cdot)T$ in $x \in E$ die Ableitung
$$h \mapsto f'(h) \mapsto f'(h)T \quad , \quad h \in E$$

□

A.3 Allgemeine Hilfsaussagen

A.3.1 Satz: Höldersche Ungleichung

Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum.

1. Sind $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L_p(\Omega),\ g \in L_q(\Omega)$, so gilt
$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{A.3.1.1}$$
2. Sind $0 < s \le 1,\ 0 < r < \infty$ mit $\frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{r}$ und $a \in L_r(\Omega),\ b \in L_1(\Omega)$, so gilt
$$\|ab\|_s \le \|a\|_r \cdot \|b\|_1 \tag{A.3.1.2}$$

Beweis:

1. Siehe Literatur.

2. Setze

$$g := |a|^s, \; f := |b|^s, \quad p := \frac{1}{s}, \; q := r+1$$

dann gilt $f \in L_p(\Omega), \; g \in L_q(\Omega)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Anwenden von (1) führt auf

$$\|ab\|_s^s = \|fg\|_1 \overset{(1)}{\leq} \underbrace{\|f\|_p}_{\|f\|_{\frac{1}{s}}} \cdot \underbrace{\|g\|_q}_{\|g\|_{r+1}} = \left\|f^{\frac{1}{s}}\right\|_1^s \cdot \left\|g^{\frac{1}{s}}\right\|_{s(r+1)}^s = \|b\|_1^s \cdot \|a\|_r^s$$

□

Bemerkung: Im Spezialfall $\Omega = \mathbb{N}$ und dem Zählmaß μ auf $\mathbb{N}$, ergeben sich die bekannten Ungleichungen für Folgen.

A.3.2 Satz: Abschätzungen der l_p-Normen

Seien $(\xi_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $0 < p \leq q < \infty$. Dann gilt

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

A.3.3 Satz über dyadische Zahlen

1. Seien $k_1, .., k_n \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} < 1$$

Dann existieren $\mathbb{N} \ni k_{n+1}, .., k_m \leq \max\{k_1, .., k_n\}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-k_i} = 1$$

2. Seien $k_1, .., k_n \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} = 1$$

dazu $k := \max\{k_1, .., k_n\}$. Dann besitzt die Menge

$$I := \{1 \leq i \leq n : k_i = k\}$$

stets eine gerade Anzahl von Indizes.

Beweis:

1. Für $k := \max\{k_1, .., k_n\}$ folgt aus

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} < 1$$

auch

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^{k-k_i}}_{\in \mathbb{N}_0} < 2^k$$

Wähle nun $q \in \mathbb{N}$ so dass

$$2^h = \sum_{i=1}^{n} 2^{k-k_i} + q = \sum_{i=1}^{n} 2^{k-k_i} + \underbrace{2^0 + \cdots + 2^0}_{\times q}$$

sprich

$$1 = \sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} + \underbrace{2^{-k} + \ldots 2^{-k}}_{\times q}$$

2. Wegen

$$1 = \sum_{i=1}^{n} 2^{-k_i} = \sum_{i \in \{1,..,n\} \setminus I} 2^{-k_i} + \sum_{i \in I} 2^{-k_i} = \sum_{i \in \{1,..,n\} \setminus I} 2^{-k_i} + |I| \cdot 2^{-\varkappa}$$

bzw.

$$0 < 1 - \sum_{i \in \{1,..,n\} \setminus I} 2^{-k_i} = |I| \cdot 2^{-\varkappa}$$

folgt

$$|I| = 2^{\varkappa} \left[1 - \sum_{i \in \{1,..,n\} \setminus I} 2^{-k_i} \right] = 2 \underbrace{\left[2^{\varkappa - 1} - \sum_{i \in \{1,..,n\} \setminus I} \underbrace{2^{\varkappa - k_i - 1}}_{\in \mathbb{N}_0} \right]}_{\in \mathbb{N}_0}$$

was zu zeigen war.

□

B Symbol-Referenz

$\mathbb{K}$: Allgemeiner Körper. Hier: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

$\mathbb{K}^{n\times n}$: Der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen über Körper $\mathbb{K}$.

E': Dualraum zum normierten Raum E. Siehe 3.2.9.

E'': Bidualraum zum normierten Raum E. Siehe 3.3.3.

$\langle x, a\rangle$: Für Vektor $x \in E$ und Funktional $a \in E'$: $\langle x, a\rangle := a(x)$.

$\mathscr{R}_{\mathcal{H}}$: Identifizierung des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ mit seinem Dualraum $\mathcal{H}'$ nach Riesz. Siehe 3.3.6.

$\mathbf{e}_k$: Standard-Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

z^*: Komplex-Konjugierte zu $z \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{C}(M)$: Raum aller stetigen Funktionen $M \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{C}(M, N)$: Raum aller stetigen Funktionen $M \to N$.

$\mathcal{C}_b(M)$: Raum aller stetigen, beschränkten Funktionen $M \to \mathbb{C}$. Konventionell ausgestattet mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{t\in M} |f(t)|$.

$\mathcal{C}_b(M, N)$: Raum aller stetigen, beschränkten Funktionen $M \to N$.

1_A: Indikatorfunktion für Menge A.

Id: Identitätsabbildung.

$(T, \mathscr{O}(T))$: Topologischer Raum mit Topologie $\mathscr{O}(T)$.

$\mathscr{B}(T)$: Borel-σ-Algebra von T: $\mathscr{B}(T) := \sigma(\mathscr{O}(T))$.

$(T, \mathscr{B}(T))$: Messbarer Raum über Grundmenge T (topologischen Raum)und Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(T)$.

$L_p(\Omega)$: Funktionenraum der p-integrierbaren, komplexwertigen Funktionen im Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$.

$\overline{A}$: Für Untermenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X: Abschluss $\mathrm{cl}(A) = \overline{A}$ von A.

$B_r(x)$: Abgeschlossene Kugel um x mit Radius r.

$B_r^o(x)$: Offene Kugel um x mit Radius r.

$\mathcal{F}(E, F)$: Raum aller finiten Operatoren in $\mathcal{L}(E, F)$. Siehe 3.4.1.

$\mathcal{A}$: Operatorenideal. Siehe 3.5.1.

$\mathcal{A}(E, F)$: Idealkomponente des Operatorenideals $\mathcal{A}$ bzgl. der Banachräume E, F. Siehe 3.5.1

$\mathcal{A}(E) := \mathcal{A}(E, E)$.

$[\mathcal{A}, \nu]$: Operatorenideal ausgestattet mit p-Quasi-Norm ν. Siehe 3.5.2.

C_ν: Quasinormkonstante der p-Quasinorm ν auf dem Operatorenideal $\mathcal{A}$. Siehe 3.5.2.

$\mathcal{F}_{\mathscr{E}}$: Operatorenideal aller finiter Operatoren über die Banachraumklasse $\mathscr{E}$. Siehe 3.5.1.

$\mathscr{E}_\infty$: Klasse aller Banachräume.

$\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$: Klasse aller $\mathbb{K}$-Banachräume.

$\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}\,\{x \in X : f(x) \neq 0\}$: Träger von $f : X \to \mathbb{C}$.

$T^\dagger$: Adjungierte Operator zu T. Für Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $M^\dagger = (M^T)^*$. Siehe 3.3.7.

T': Duale Operator zu T. Siehe 3.3.1.

K_E: Kanonische Einbettung $K_E : E \to E''$ des Banachraumes E in sein Bidual E''. Siehe **??**.

$\mathcal{N}(T)$**:** Nullraum (Kern) des Operators T: $\mathcal{N}(T) = \text{kernel}(T)$. Siehe 3.2.1.

$\mathcal{R}(T)$**:** Bildraum des Operators T: $\mathcal{R}(T) := \text{image}(T)$. Siehe 3.2.1.

$\text{rang}(T)$**:** Rank des Operators T: $\text{rang}(T) := \dim \text{image}(T)$. Siehe 3.4.1.

$\|T\|$**:** Operatornorm des Operators T. Siehe 3.2.1.

$\mathcal{L}(E, F)$**:** Raum aller linearer, beschränkten Operatoren zwischen den normierten Räumen E, F. Siehe 3.2.1.

$\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Q_N**:** Quotientenabbildung $Q_N : E \to E/N$ bzgl. des linearen, abgeschlossenen Teilraumes $N \subseteq E$. Siehe 3.2.7.

$I_{\mathcal{R}(T)}$**:** Inklusion des Bildes $\mathcal{R}(T)$ des Operators $T \in \mathcal{L}(E, F)$ in F. Siehe 3.2.8.

$Q_{\mathcal{N}(T)}$**:** Quotientenabbildung bzgl. des Nullraums $\mathcal{N}(T)$ des Operators T. Siehe 3.2.8.

$a \otimes x$**:** Tensorprodukt zwischen $a \in E',\ x \in E$. Siehe Beispiel in 3.4.1.

$\sigma(T)$**:** Spektrum des komplexen Operators T. Siehe 3.6.1.

$\rho(T)$**:** Resolventenmenge des komplexen Operators T. Siehe 3.6.1.

$\sigma_p(T)$**:** Punktspektrum (Eigenwerte) des Operators T. Siehe 3.6.1.

$\text{Alg}_T(\lambda)$**:** Algebraische Vielfachheit von $\lambda \in \mathbb{C}$ bzgl. des Operators T. Siehe 3.6.1.

$\text{Geom}_T(\lambda)$**:** Geometrische Vielfachheit von $\lambda \in \mathbb{C}$ bzgl. des Operators T. Siehe 3.6.1.

$(\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$**:** Eigenwertfolge (nach Absolutbeträgen fallend) des Operators T. Siehe Konvention 3.6.4.

trace**:** Spurabbildung auf dem Ideal der finiten Operatoren. Siehe 4.1.4.

det**:** Determinantenabbildung auf dem Ideal der finiten Operatoren. Siehe 4.2.3.

$\mathscr{A}$**:** Zum Operator $A \in \mathcal{L}(E)$ gehörige Antikommutatorabbildung: $\mathscr{A}(X) := AX + XA$. Siehe 6.2.3.

$d_n(T)$**:** Approximationszahl des Operators $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Siehe 3.5.6.

$d(T)$**:** $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(T)$. Siehe 3.5.9.

$\mathcal{I}$**:** Operatorenideal aller integralen Operatoren. Siehe 5.1.1.

$I(T)$**:** Integralnorm des integralen Operators $T \in \mathcal{I}$. Siehe 5.1.1.

$\mathfrak{N}_p$**:** Operatorenideal aller p-nuklearen Operatoren. Siehe 5.2.1.

$N_p(T)$**:** p-Nuklearnorm des p-nuklearen Operators $T \in \mathfrak{N}_p$. Siehe 5.2.1.

Literatur

[1] *Nonlinear Equations and Operator Algebras*, V.A. Marchenko
Springer, 1987

[2] *Nonlinear Waves and Solitons*, M. Toda
Springer, 1989

[3] *Eigenvalues and $\mathcal{S}$-Numbers*, A. Pietsch
Cambridge University Press, 1987

Index