Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

30. Januar 2010

Aufgabe 12

Betrachtet sei die DGL

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \cdot r(x) - y \cdot b(x) - z \cdot B(x) \\ y \cdot (u \cdot b(x) - d) \\ z \cdot (w \cdot B(x) - e) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} \in [0, \infty)^3 =: \mathbb{R}^3_+$$

wobei:

- $r(x)$ streng fallend sei mit $r_m := r(0) > 0$ und $K > 0$ als limitierende Kapazität: $r(K) = 0$.
- b und B streng wachsend seien, mit jeweils asymptotischen Suprema b_m, $B_m > 0$. Außerdem seien $b(0) = B(0) = 0$.
- $d, e > 0$ und $0 < u, w < 1$.

Abbildung (0.1) illustriert obiges Vektorfeld für typische Ansätze von r, b, B.

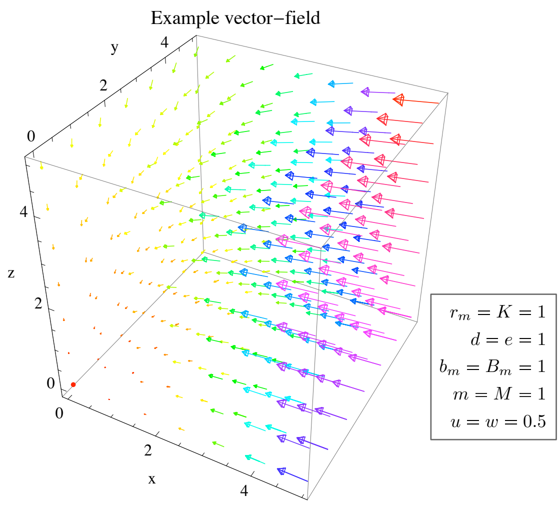

Abbildung 0.1: Verlauf des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ für logistische $r(x)$ und funktionelle Reaktionen b, B vom Typ II.

Existenz von Fixpunkten

Die Fixpunkte des Systems ergeben sich als:

- $\mathbf{x}_1^0 := (0,0,0)$
- $\mathbf{x}_2^0 := (K,0,0)$
- $\mathbf{x}_3^0 := \big(x^0, 0, x^0 r(x^0)w/e\big)$ mit $B(x^0) = e/w$ (insofern lösbar für $x^0 \geq 0$, das heißt $B_m > e/w$). Insbesondere $x_3^0 < K$.
- $\mathbf{x}_4^0 := \big(x^0, x^0 r(x^0)u/d, 0\big)$ mit $b(x^0) = d/u$ (insofern lösbar für $x^0 \geq 0$, das heißt $b_m > d/u$). Insbesondere $x_4^0 < K$.

Der Fall $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ mit $y^0 \neq 0 \neq z^0$ ist nur möglich falls das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u \cdot b(x^0) &= d \\ w \cdot B(x^0) &= e \end{aligned}$$

lösbar ist, was einer Parameter-Menge vom Maß 0 entspricht. Im allgemeinen können die beiden Räuber jedoch nicht stabil koexistieren!

Stabilität der Fixpunkte

Der Jacobian

$$J := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} xr' + r - yb' - zB' & -b & -B \\ yub' & ub - d & 0 \\ zwB' & 0 & wB - e \end{pmatrix}$$

nimmt an den Fixpunkten jeweils die Werte

$$J(\mathbf{x}_1^0) = \begin{pmatrix} r_m & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}$$

$$J(\mathbf{x}_2^0) = \begin{pmatrix} Kr'(K) & -b(K) & -B(K) \\ 0 & ub(K) - d & 0 \\ 0 & 0 & wB(K) - e \end{pmatrix}$$

$$J(\mathbf{x}_3^0) = \begin{pmatrix} x^0 r'(x^0) + r(x^0) - x^0 r(x^0) B'(x^0) w/e & -b(x^0) & -e/w \\ 0 & ub(x^0) - d & 0 \\ x^0 r(x^0) w^2 B'(x^0)/e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(\mathbf{x}_4^0) = \begin{pmatrix} x^0 r'(x^0) + r(x^0) - x^0 r(x^0) b'(x^0) u/d & -d/u & -B(x^0) \\ x^0 r(x^0) u^2 b'(x^0)/d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & wB(x^0) - e \end{pmatrix}$$

Zu erkennen ist:

- $J(\mathbf{x}_1^0)$ besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte. Der Ursprung ist also stets ein Sattelpunkt.
- $J(\mathbf{x}_2^0)$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = Kr'(K) < 0$, $\lambda_2 = ub(K) - d$ und $\lambda_3 = wB(K) - e$. So ist $\mathbf{x}_2^0$
    - asymptotisch stabil, falls $b(K) < d/u$ und $B(K) < e/w$ sind. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die Fixpunkte $\mathbf{x}_3^0, \mathbf{x}_4^0$ nicht existieren.

- $\circ$ instabil, falls $b(K) > d/u$ oder $B(K) > e/w$ sind.

- $J(\mathbf{x}_3^0)$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = ub(x^0) - d$ und $\lambda_{2,3} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ wobei

$$a_1 := -J_{11}(\mathbf{x}_3^0) = -x^0 r'(x^0) - r(x^0) + x^0 r(x^0) B'(x^0) w/e$$

$$a_2 := -J_{13}(\mathbf{x}_3^0) J_{31}(\mathbf{x}_3^0) = x^0 r(x^0) w B'(x^0) > 0$$

So ist $\mathbf{x}_3^0$:

- $\circ$ stabil, falls $b(x^0) < d/u$ und $x^0 r'(x^0) + r(x^0) < x^0 r(x^0) B'(x^0) w/e$.
- $\circ$ instabil, falls $b(x^0) > d/u$ oder $x^0 r'(x^0) + r(x^0) > x^0 r(x^0) B'(x^0) w/e$.

- $J(\mathbf{x}_4^0)$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = wB(x^0) - e$ und $\lambda_{2,3} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ wobei

$$a_1 := -J_{11}(\mathbf{x}_4^0) = -x^0 r'(x^0) - r(x^0) + x^0 r(x^0) b'(x^0) u/d$$

$$a_2 := -J_{12}(\mathbf{x}_4^0) J_{21}(\mathbf{x}_4^0) = x^0 r(x^0) u b'(x^0) > 0$$

So ist $\mathbf{x}_4^0$:

- $\circ$ stabil, falls $B(x^0) < e/w$ und $x^0 r'(x^0) + r(x^0) < x^0 r(x^0) b'(x^0) u/d$.
- $\circ$ instabil, falls $B(x^0) > e/w$ oder $x^0 r'(x^0) + r(x^0) > x^0 r(x^0) b'(x^0) u/d$.

Konkurrenz der Räuber

Im Fall dass nur einer (oder keiner) der beiden Fixpunkte $\mathbf{x}_3^0, \mathbf{x}_4^0$ existiert ist klar. Betrachten im folgenden also nur den Fall dass $\mathbf{x}_0^3, \mathbf{x}_0^4$ tatsächlich existieren, insbesondere also $b_m > d/u$ und $B_m > e/w$. Da sowohl b als auch B wachsend sind folgen die Äquivalenzen:

- $\big(wB(x_4^0) - e\big) > 0 \;\Leftrightarrow\; x_3^0 < x_4^0 \;\Leftrightarrow\; \big(ub(x_3^0) - d\big) < 0.$
- $\big(wB(x_4^0) - e\big) < 0 \;\Leftrightarrow\; x_3^0 > x_4^0 \;\Leftrightarrow\; \big(ub(x_3^0) - d\big) > 0.$

Können also o.B.d.A. **annehmen** dass $x_3^0 < x_4^0$. Nähert sich nun das System bzgl. x dem Fixpunkt $\mathbf{x}_0^4$, so ist z (insofern vorhanden) in einer gewissen Umgebung von (x_4^0) stets wachsend, Räuber z stirbt insbesondere nicht aus. Nähert sich das System anderseits bzgl. x dem Fixpunkt $\mathbf{x}_3^0$, so ist y (insofern vorhanden) in einer gewissen Umgebung von (x_3^0) stets fallend. Dabei wächst zwar x, doch dies gleicht sich durch Wachstum von z aus um schließlich in den Fixpunkt $\mathbf{x}_3^0$ zu gelangen.

Fazit: Gewinnen tut[1] Räuber z (insofern $\mathbf{x}_3^0$ stabil). Interpretationsgemäß ist die Pro-Kopf Reproduktionsrate von z bei gleichem Beute-Angebot (x_4^0) höher als die von y. Anders gesagt, z gibt sich bei kleinerem Beuteangebot x_3^0 schon *zufrieden*. Dies kann sowohl an einem höheren Umsatzfaktor w bzw. Konsumfunktion B (*Jagdfähigkeit*) als auch einer niedrigeren Sterberate e liegen.

[1] Im alternativen Fall $x_3^0 > x_4^0$, würde das Ergebnis genau umgekehrt lauten.

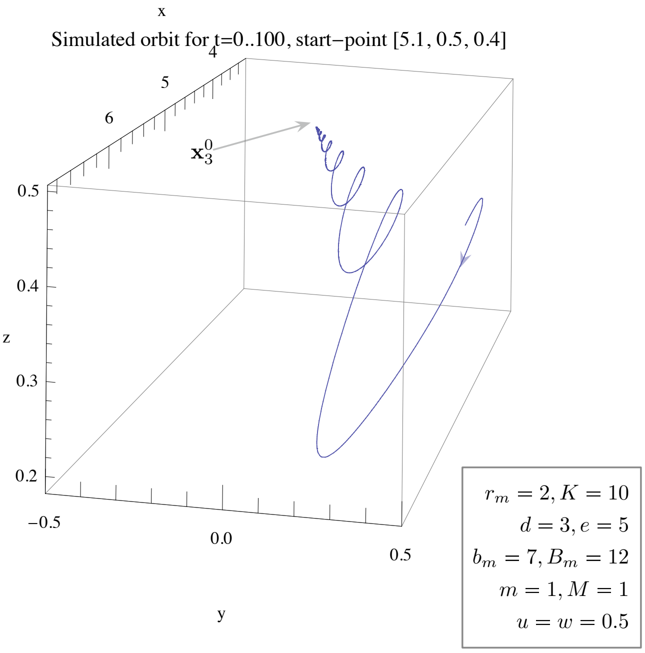

Abbildung 0.2: Zum (stabilen) Fixpunkt $\mathbf{x}_0^3$ konvergierender Orbit im Falle $x_3^0 < x_4^0$.

Alternativ kann der Fall betrachtet werden, bei dem (x, z) im Gleichgewichtspunkt (x_3^0, z_3^0) liegen und y von Null aus eine kleine Störung erfährt. Befindet sich das zweier-System zunächst im gegenseitigen Gleichgewicht, das heißt $x^0 r'(x^0) + r(x^0) < x^0 r(x^0) B'(x^0) w/e$, so impliziert die Forderung $x_3^0 < x_4^0$ automatisch Bedingung $b(x_3^0) < d/u$, so dass das $\mathbf{x}_3^0$ nach obigen Überlegungen auch im vollständigen dreier-System stabil ist.

Zur Veranschaulichung diene Abbildung (0.3), die das $(\dot{x}, \dot{z})$-Vektorfeld im Falle $y = 0$ und $x_3^0 < x_4^0$ illustriert. Für hinreichend kleine Störungen von y ($y \ll x, z$) behält das Vektorfeld seine qualitative Form und y beeinflusst die Wechselwirkung zwischen x & z minimal. Anderseits befindet sich x_0^3 im Bereich wo y stets fallend ist. Die kleine Störung von y *schaukelt* sich daher gar nicht erst auf und y wird zur *Extinktion* gezwungen.

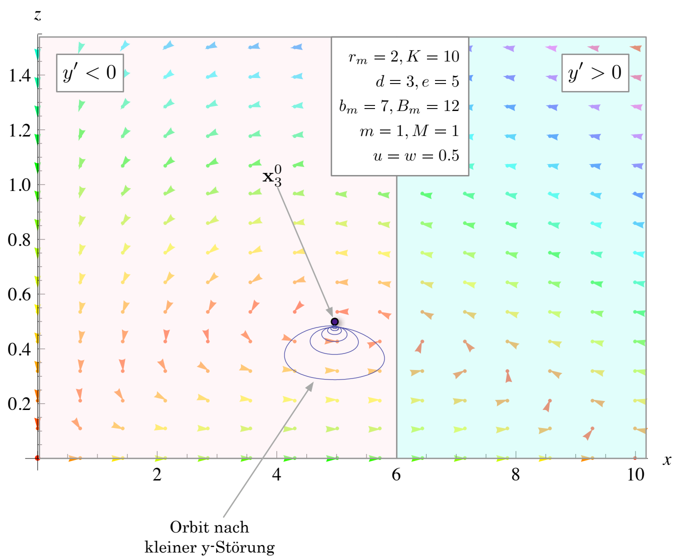

Abbildung 0.3: Typischer verlauf des Feldes $(\dot{x}, \dot{z})$ für $y = 0$ im Falle $x_3^0 < x_4^0$ mit (x_3^0, z_3^0) im Zweier-System stabil. Eine kleine Störung von y beeinträchtigt das qualitative Verhalten von x & z nur minimal. Anderseits strebt y sofort wieder gegen 0.

Befände sich anderseits x_3^0 im $\{\dot{y} > 0\}$ (rechten) Bereich, so würde selbst die kleinste y-Störung ein sofortiges Wachstum letzterer zu Folge haben. Das Feld $(\dot{x}, \dot{z})\big|_y$ ändert sich sofort und das (unter Umständen einst stabile) Gleichgewicht wird zerstört (vgl. Abb. (0.4)).

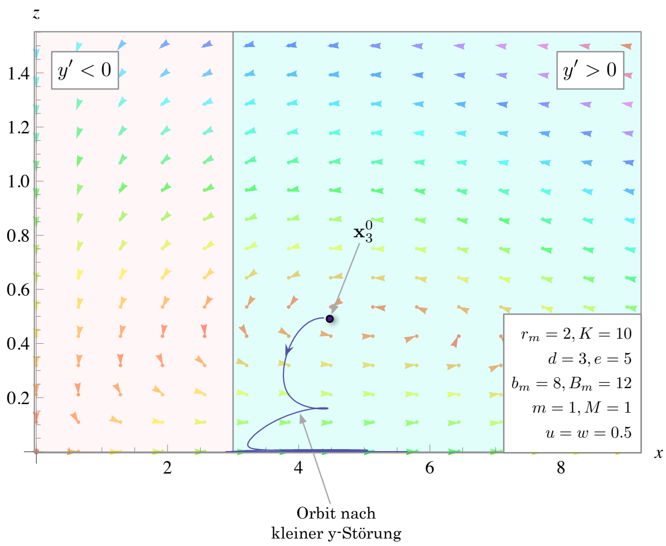

Abbildung 0.4: Typischer verlauf des Feldes $(\dot{x}, \dot{z})$ für $y = 0$ im Falle $x_3^0 > x_4^0$ mit (x_3^0, z_3^0) im Zweier-System stabil. Eine kleine Störung von y führt jedoch dazu, dass y sofort zu wachsen beginnt und schließlich (x, z) aus ihrem gegenseitigen Gleichgewicht treibt.