Übungen zur Mathematischen Biologie [redacted]

Aufgabe 12: Untersuchen Sie ein Modell von zwei Konsumenten (Räubern), die sich von einer gemeinsamen kapazitiv begrenzten Ressource (Beute) ernähren! Dabei setzen wir das Wachstum der Räuber proportional zur aufgenommenen Nahrungsmenge an und schließen Interferenz innerhalb und zwischen den Räubern aus:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= x \cdot r(x) - y \cdot b(x) - z \cdot B(x) \quad , \\ \dot{y} &= y \cdot \left(u \cdot b(x) - d\right) \quad , \\ \dot{z} &= z \cdot \left(w \cdot B(x) - e\right) \quad . \end{aligned}}$$

Nehmen Sie dabei (als Leitbeispiel) für b bzw. B jeweils eine funktionelle Reaktion vom Typ II an:

$$b(x) = b_m \cdot \frac{x}{x+m} \quad , \quad B(x) = B_m \cdot \frac{x}{x+M} \quad .$$

Die Parameter u und w seien (als Umsatzeffizienz) beide kleiner als Eins. Für die Pro-Kopf-Netto-Reproduktionsrate der Beute $r(x)$ machen Sie den üblichen logistischen Ansatz mit einer limitierenden Kapazität K.

a) Untersuchen Sie, welche Gleichgewichtswerte es in Abhängigkeit vom Parameter K gibt und wie deren Stabilität aussieht ! Zeigen Sie, daß bei diesem Ansatz immer nur eine Räuberart überleben kann ! Welche Räuberart gewinnt, wie kann man diese analytisch (oder grafisch?) charakterisieren und wie biologisch interpretieren ?

Versuchen Sie, die Aussagen gleich für den allgemeinen Fall (!!) zu erhalten, indem Sie nur die qualitativen Eigenschaften der Funktionen $r(x)$ (d.h. fallend in x) und $b(x)$ bzw. $B(x)$ (von Null an wachsend bis zum Maximalwert b_m bzw. B_m) verwenden!

b) Geben Sie alternativ eine grafische Diskussion des Stabilitätsverhaltens an, indem Sie die Wachstumsraten jeder Räuberart diskutieren, wenn die Beute und eine Räuberart im Gleichgewicht des Zwei-Arten-Modells vorliegen und die jeweils andere Räuberart (beginnend von Null) in sehr kleiner Menge eingesetzt wird.

Hinweis: Bitte bei der Lösung nicht in aufwendige algebraische Umformungen einsteigen, sondern das Wesentliche der Aufgabe nahezu „qualitativ“ erkennen und die angegebenen konkreten Abhängigkeiten $b(x)$ bzw. $B(x)$ gar nicht verwenden !! - Im übrigen können Sie die Eigenwerte für alle Gleichgewichte explizit bestimmen und daraus die Stabilität ermitteln. Beachten Sie, daß Sie u.U. gar nicht das HURWITZ-Kriterium für $n = 3$ brauchen (im Arbeitsmaterial zur Vorlesung gegeben), weil Sie beim Berechnen der Determinante gleich einen Faktor $\lambda - \lambda_1$ abspalten und auf die restliche Gleichung das bekannte HURWITZ-Kriterium für $n=2$ anwenden können.

Abgabe: Donnerstag, [redacted] (zur Vorlesung)

Besprechung: in der Übung