Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

Aufgabe 11: Es sind verschiedene Modelle entwickelt worden, um das von Ruhephasen unterbrochene periodische „Feuern“ von Neuronen („bursting“), d.h. den Wechsel zwischen einem aktiven Zustand (schnellen Oszillationen) und einem Ruhezustand (keine Oszillationen), zu beschreiben. In der Regel sind daran „schnelle“ und „langsame“ Variable beteiligt, wobei man vereinfachend die langsamen Variablen als (Bifurkations-)Parameter für die schnellen Variablen ansehen kann.

Ein einfaches System von Differentialgleichungen (hier ohne spezielle biologische Begründung), das dieses Verhalten erzeugt, ist gegeben durch

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 + I - z \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y \\ \dot{z} &= r \cdot [s \cdot (x - x_1) - z] \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &I = 2\,, \\ &r = 0.001\,,\ s = 4\,,\ x_1 = -1.618 \end{aligned} \quad .$$

Wenn r sehr klein ist, können wir $z(t)$ als langsame Variable betrachten und deshalb in der ersten Gleichung zunächst $z(t) \equiv \mu$ als Parameter verwenden:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 + 2 - \mu \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y \end{aligned}} \quad .$$

a) Diskutieren Sie die Lage der Hauptisoklinen, zeigen Sie speziell, daß die s-Isokline stets zwei Extrema besitzt ! Ermitteln Sie die Anzahl der möglichen Fixpunkte in Abhängigkeit von μ, indem Sie eine Bestimmungsgleichung für x aufstellen und überlegen, wieviele Lösungen diese kubische Gleichung haben kann ! Die kritischen μ-Werte sind dann die Stellen, wo eine Doppelwurzel vorliegt – welche Bifurkation tritt dort jeweils auf?

b) Untersuchen Sie die Stabilität der Fixpunkte durch Linearisierung ! Sie können zwar die Fixpunkte nicht explizit einsetzen, aber da die charakteristische Gleichung den Parameter μ gar nicht enthält, können Sie feststellen, bei welchen x-Werten ein Stabilitätswechsel stattfindet und dann den zugehörigen μ-Wert ausrechnen, wo der betreffende x-Wert gerade Fixpunkt ist.

Überlegen Sie deshalb separat, wo der Term a_2 aus der charakteristischen Gleichung gleich Null ist (welche x-Werte und deshalb welche μ-Werte ?, was für eine Bifurkation?) bzw. wo der Term a_1 verschwindet (welche x-Werte und deshalb welche μ-Werte ?, was für eine Bifurkation?). Auf diese Weise können Sie schon wesentliche Teile des Bifurkationsbildes aufzeichnen.

c) Nur numerisch ist nachweisbar, daß jeweils eine homokline Bifurkation[+)] auftritt, wenn die „Amplitude“ des Grenzzyklus den „inneren“ der obigen drei Fixpunktzweige erreicht. Versuchen Sie mit Hilfe dieses Wissens, das Bifurkationsbild bzgl. x zu vervollständigen (alle Fixpunktzweige und deren Stabilität, alle stabilen Grenzzyklen zeichnen) !

*d1) Versuchen Sie jetzt qualitativ zu diskutieren, wie es im vollen Drei-Variablen-System zu „bursting“ kommen kann: Beginnen Sie mit großen z-Werten und x im „unteren“ stabilen Fixpunktzweig und zeigen Sie, daß dort $z(t)$ langsam abnehmen muß. (Für welche x ist $\dot{z}$ negativ?) Was passiert, wenn $z(t)$ genügend klein geworden ist ?

**d2) Alternativ können Sie auch eine numerische Integration durchführen und das zeitliche Verhalten von $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ darstellen.

[+)] *Homokline Bifurkation: Ein stabiler Grenzzyklus erreicht einen Sattel und verschwindet dann.*

Abgabe: Donnerstag, 28. 1. 10 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (2. 2. 10)