Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

Aufgabe 10: Zwei diskrete Populationen, die durch Biomasseaustausch (= Wanderung von Individuen) gekoppelt sind, werden im einfachsten Fall durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen beschrieben, die jeweils einen koloniespezifischen Reproduktionsteil und einen Austauschterm enthalten:

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + D \cdot (x_2 - x_1) \quad ,$$

$$\dot{x}_2 = g(x_2) - D \cdot (x_2 - x_1)$$

Dabei stellt D die spezifische (d.h. Pro-Kopf-)Austauschrate dar, f und g sind die jeweiligen lokalen (absoluten) Reproduktionsraten.

Falls in beiden Patches die gleichen Umweltbedingungen vorliegen, gilt $f = g$. Ansonsten können f und g z.B. als logistische Ansätze mit unterschiedlichen maximalen spezifischen Wachstumsraten r_{1m} bzw. r_{2m} oder/und unterschiedlichen Kapazitäten K_1 bzw. K_2 angesehen werden.

a) Wie lauten die Gleichungen der Hauptisoklinen $x_2 = s(x_1)$ und $x_2 = w(x_1)$ (bzw. die der inversen Funktion $x_1 = w^{-1}(x_2)$)? Versuchen Sie für typische unimodale Reproduktionsfunktionen f bzw. g die Lage von möglichen Fixpunkten grafisch zu bestimmen! Ermitteln Sie mittels Linearisierung deren Stabilitätscharakter (Knoten oder Sattel, stabil oder instabil)! Die JACOBI-Matrix bzw. die Terme in der charakteristischen Gleichung für die Eigenwerte lassen sich relativ leicht durch die Anstiege der beiden Hauptisoklinen $s'(x_1^o)$ und $w'(x_1^o)$ am jeweiligen Fixpunkt ausdrücken (eine explizite Berechnung ist zwar möglich, aber aufwendiger)! Welche Ungleichungen müssen für s' und w' gelten, damit ein Sattel oder ein stabiler bzw. instabiler Knoten vorliegen ? Sind Strudel möglich ?

b) Diskutieren Sie grafisch als konkreten Spezialfall zwei gekoppelte logistische Populationen in Patches mit gleichen maximalen Pro-Kopf-Wachstumsraten, aber unterschiedlichen Kapazitäten:

$$f(x_1) = r_m \cdot x_1 \cdot (1 - \frac{x_1}{K_1}) \qquad , \quad g(x_2) = r_m \cdot x_2 \cdot (1 - \frac{x_2}{K_2}) \quad .$$

Welche möglichen Fixpunkte des Gesamtsystems gibt es im allgemeinen Fall bzw. in dem symmetrischen Spezialfall $K_1 = K_2$ (Skizze!)?

*c) Wie hängt die Lage des inneren (oder der inneren ?) Fixpunkte von der Austauschrate D ab (speziell für $D \to 0$ bzw. $D \to \infty$)?

**d) Zusatz für „Anspruchsvolle“: Untersuchen Sie das Verhalten einer Population mit überkritischem ALLEE-Effekt (d.h. bistabilem Verhalten) in zwei Patches gleicher Qualität! Überlegen Sie dazu grafisch, wie Anzahl, Lage und Stabilitätscharakter der Fixpunkte von der Wanderungsstärke D abhängen! Interpretieren Sie dies biologisch! Wann stirbt die Population in beiden Patches aus?

Abgabe: Donnerstag, 21. 1. 10 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (26. 1. 10)