Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

Aufgabe 9: In der allgemeinen Variante des LOTKA-VOLTERRA-Modell der Konkurrenz (siehe Abschnitt 2.3.3. in der Vorlesung) wird angenommen, daß die Beute einem logistisch begrenztem Wachstum (mit linear fallender Pro-Kopf-Netto-Reproduktionsrate) unterliegt, die Räuber pro Kopf proportional zur Beutemenge konsumieren, aber nach dem Fraß interferieren, was durch eine lineare Zunahme der Pro-Kopf-Sterberate der Räuber ($d + f \cdot y$) beschrieben wird.

Damit erhalten wir die beiden nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{x} = x \cdot (a - e \cdot x - b \cdot y) \;, & a, b, c, d, e > 0 \;, \\ \dot{y} = y \cdot (c \cdot x - d - f \cdot y) \;, & f \geq 0 \;. \end{array}}$$

a) Wie groß sind die freie Wachstumsrate r_m und die Kapazität K der Beutepopulation? Wie verlaufen die beiden Haupt-Isoklinen? Ermitteln Sie alle Fixpunkte und durch Linearisierung deren Stabilität! Für welche Werte der Parameter gibt es einen inneren Fixpunkt (x^o, y^o)?

b) Zeigen Sie für den Fall der Existenz des inneren Fixpunktes (x^o, y^o), daß die Funktion

$$\boxed{H(x,y) := c \cdot (x - x^o \cdot \log x) + b \cdot (y - y^o \cdot \log y)}$$

(für $f \neq 0$) eine strenge **LJAPUNOV-Funktion** ist, d.h. längs jeder Bahn der obigen Differentialgleichung, die im Inneren des ersten Quadranten außerhalb des inneren Fixpunktes beginnt, streng abnimmt, und daß deshalb jede Bahn den inneren Fixpunkt erreicht !

c) Charakterisieren Sie die Funktion $H(x,y)$ durch eine Skizze! Wie sehen speziell die Höhenlinien von H aus? Begründen Sie damit die Aussage, daß im Falle des Vorliegens einer strengen LJAPUNOV-Funktion die (globale) Stabilität des betreffenden Fixpunktes gezeigt ist!

d) Das einfache LOTKA-VOLTERRA-Modell der Konkurrenz beruht auf den Annahmen, daß die Beute unbegrenzt wachsen kann ($e = 0$) und die Räuber eine konstante Sterberate besitzen ($f = 0$). Welche Aussage ergibt sich damit für das Verhalten von H längs jeder Bahn, und wie sehen deshalb die Trajektorien aus (das ist nur eine "Erinnerung" an die Vorlesung) ?

Anmerkung: $H(x,y)$ heißt „LJAPUNOV-Funktion", wenn längs jeder Bahn ($x(t),y(t)$) des Differentialgleichungssystems $dx/dt = f(x,y)\,,\; dy/dt = g(x,y)$ die Funktion $\tilde{H}(t) := H\big(x(t),y(t)\big)$ (in einer endlich großen Umgebung eines Fixpunktes (x^o,y^o)) zeitlich stets abnimmt, d.h. wenn gilt

$$\frac{d}{dt}\tilde{H}(t) := \frac{d}{dt}H\big(x(t),y(t)\big) = \frac{\partial}{\partial x}H\big(x,y\big)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}H\big(x,y\big)\cdot\frac{dy}{dt} < 0$$

für alle $(x,y) \neq (x^o,y^o)$.

Hinweis: Sie müssen für b) die Funktion H partiell differenzieren und die obigen Differentialgleichungen einsetzen. Verwenden Sie dabei (auch in Teil a)!) nicht die expliziten Lösungen für x^o und y^o, sondern versuchen Sie, die Gleichungen für den inneren Fixpunkt „implizit" zu verwenden (indem Sie z.B. a durch den Term $e \cdot x^o - b \cdot y^o$ ersetzen.) Die Teile c) und d) lassen sich übrigens auch bearbeiten, wenn der Beweis unter b) nicht gelingt.

Abgabe: Donnerstag, 14. 1. 10 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (19. 1. 2010)