

Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

27. Dezember 2009

Aufgabe 08

Zu untersuchen ist das eindimensionale Modell

$$\dot{x} = f(x) := \underbrace{x \cdot r_m \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)}_{r(x)} - \underbrace{H \cdot \frac{b_m x}{x + M}}_{b(x)}, \quad r_m, K, H, b_m, M > 0 \quad (0.1)$$

Substituieren $z := x/K$ und erhalten

$$\dot{z} = \varphi(z) := r_m \cdot z \cdot [\rho(z) - \beta(z)]$$

$$\rho(z) := 1 - z, \quad \beta(z) := \frac{h}{z + \mu}$$

wobei

$$h := \frac{Hb_m}{Kr_m}, \quad \mu := \frac{M}{K} \quad (0.2)$$

(a) **Fall** $x \in [0, \infty)$

Ersichtlich ist, dass $z = z_1^0 := 0$ stets Fixpunkt ist, wobei sich die restlichen als Schnittpunkte von ρ und β ergeben. Da $\rho(z)$ linear, monoton fallend und $\beta(z) > 0$ eine in $[0, \infty)$ monoton fallende, mit $z \rightarrow \infty$ gegen 0 gehende, Hyperbel ist, können diese je nach h, μ -Werten entweder 0, 1 oder 2 Schnittpunkte haben.

Abbildungen (0.1) und (0.2) illustrieren die möglichen Fälle je nach h und μ Werten.

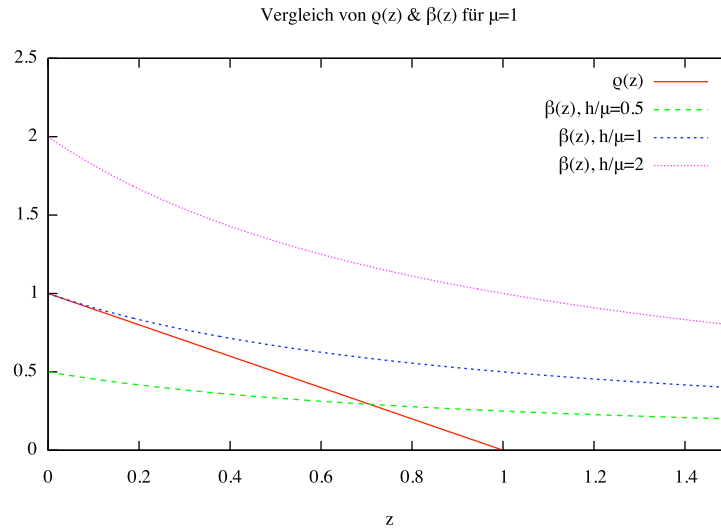


Abbildung 0.1: Vergleich von $\rho(z)$ und $\beta(z)$ für $\mu = 1$ und verschiedene h -Werte.

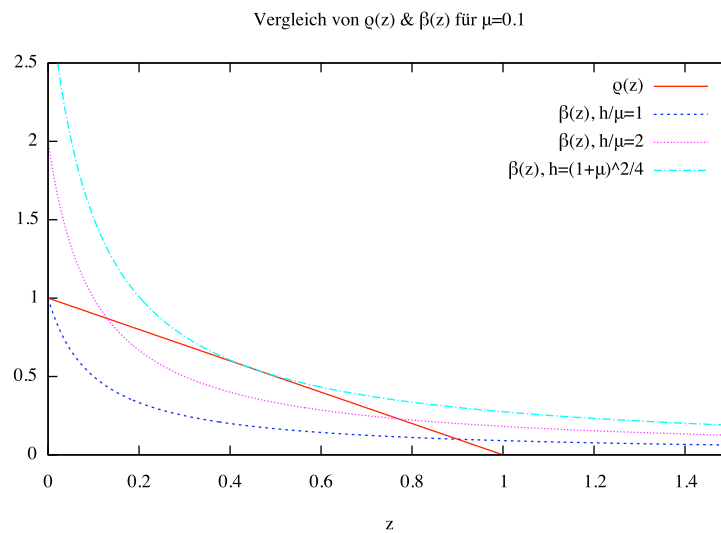


Abbildung 0.2: Vergleich von $\rho(z)$ und $\beta(z)$ für $\mu = 1/10$ und verschiedene h -Werte.

Abbildungen (0.3) und (0.3) zeigen den Verlauf von φ für typische h und μ Werte.

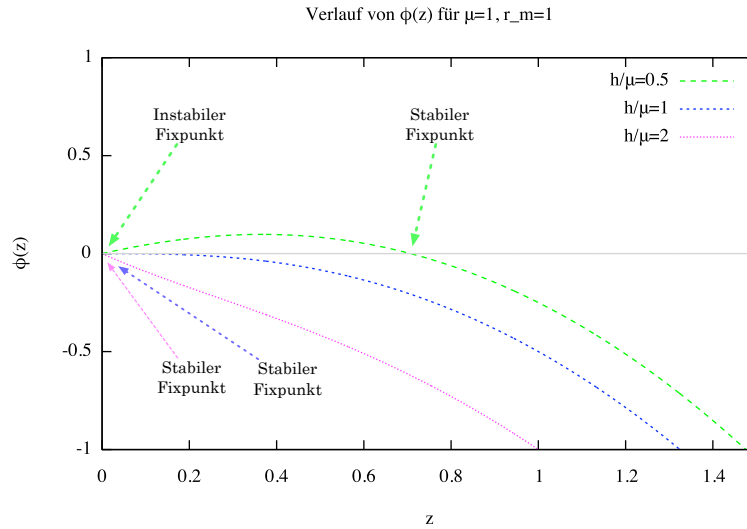


Abbildung 0.3: Verlauf von $\varphi(z)$ für $\mu = 1$, $r_m = 1$ und verschiedene h -Werte.

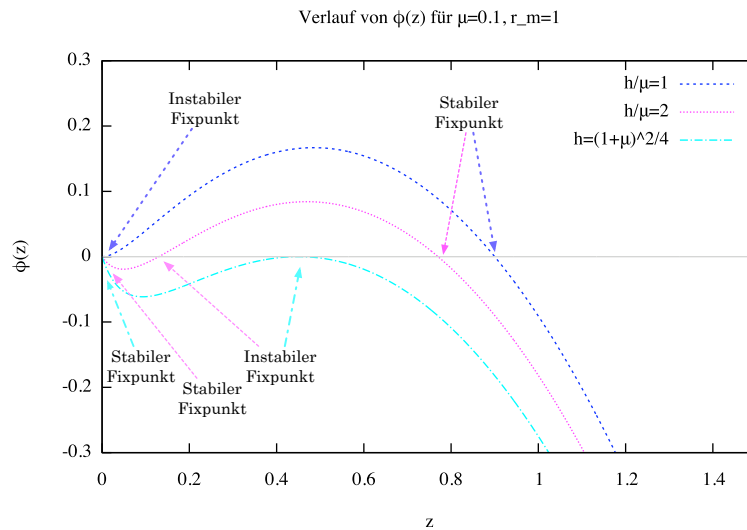


Abbildung 0.4: Verlauf von $\varphi(z)$ für $\mu = 1/10$, $r_m = 1$ und verschiedene h -Werte.

Zu erkennen ist:

- Alle Fixpunkte von z befinden sich stets im Intervall $[0, 1]$.
- Liegt (bei genügend großem h) kein Schnittpunkt zwischen ρ & β vor¹ (vgl. Abb. (0.1)) so ist $\varphi(z) < 0$ auf ganz $(0, \infty)$ und die Population strebt stets gegen den stabilen Fixpunkt $z_1^0 = 0$. Interpretationsgemäß ist die Herbivoren-Population H bzw. der *Maximalkonsum* Hb_m einfach zu hoch für eine stabile Koexistenz mit der Weide.
- Liegen zwei Schnittpunkte $0 \leq z_2^0 < z_3^0$ zwischen ρ & β vor² (vgl. Abb. (0.2)) so ist $\varphi > 0$ im Intervall (z_2^0, z_3^0) und $\varphi < 0$ im Bereich $(0, z_2^0) \cup (z_3^0, \infty)$. Dementsprechend ist der Fixpunkt z_2^0 instabil, der Fixpunkt z_3^0 stattdessen stabil. Im Fall $z_2^0 \neq z_1^0$ (also $h \neq \mu$) ist z_1^0 ebenfalls stabil.

¹Explizit: Genau dann wenn $h > (1 + \mu)^2/4$ oder $h > \mu > 1$.

²Explizit: Genau dann wenn $1 > \mu \leq h < (1 + \mu)^2/4$.

Für $h \rightarrow \mu^+$ strebt $z_2^0 \rightarrow 0$ und $z_3^0 \rightarrow (1 - \mu)$.

- Schneiden sich ρ & β nur in $z_1^0 = 0$ ³ (vgl. Abb. (0.1)) so ist $\varphi < 0$ im Gesamten $(0, \infty)$, sprich die Weidenpopulation strebt stets gegen 0.
- Ist $\beta(0) < \rho(0)$ ⁴, sprich ρ & β schneiden sich nur in einem Punkt $z_3^0 \in (0, 1)$ (vgl. Abb. (0.1)) so ist $\varphi|_{(0, z_3^0)} > 0$ und $\varphi|_{(z_3^0, \infty)} < 0$, sprich der Fixpunkt z_3^0 ist stabil und die Weidenpopulation strebt für jeden nicht-trivialen Anfangswert gegen z_3^0 . Insbesondere ist z_1^0 instabil.
Für $h \rightarrow 0^+$ strebt $z_3^0 \rightarrow 1$.
- Ist $\beta(0) > \rho(0)$ und ρ & β schneiden sich nur in einem Punkt $z_3^0 \in (0, 1)$ ⁵ (vgl. Abb. (0.2)) so ist $\varphi|_{(0, z_3^0)} < 0$ und $\varphi|_{(z_3^0, \infty)} < 0$, sprich z_3^0 ist rechtsseitig stabil, linksseitig instabil.

Abbildung (0.5) stellt obige Zusammenhänge für die Fälle $\mu < 1$ und $\mu > 1$ dar.

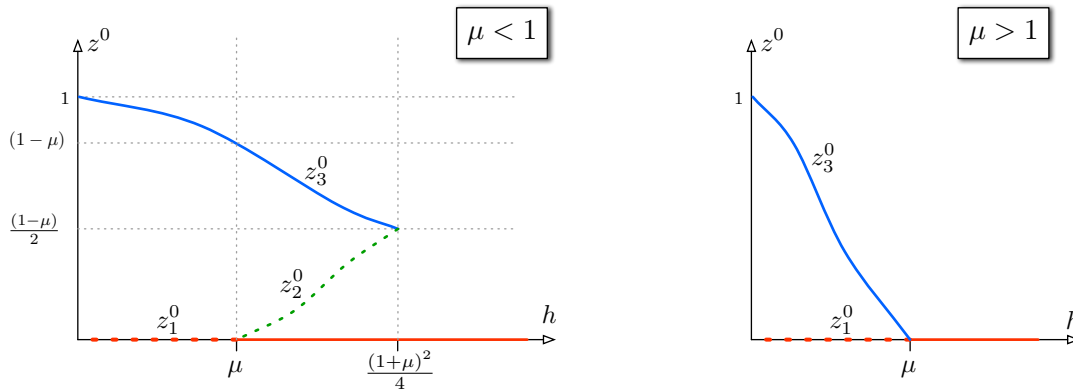


Abbildung 0.5: Qualitative Lage & Stabilität der Fixpunkte in Abhängigkeit von h für $\mu < 1$ und $\mu > 1$.

Fall $x \in \mathbb{R}$

Aus

$$\varphi(z) = r_m z [\rho(z) - \beta(z)] = \frac{r_m z}{z + \mu} [-z^2 + z(1 - \mu) + (\mu - h)]$$

wird ersichtlich:

- Wegen $\text{sgn}[\varphi'|_0] = \text{sgn}(\mu - h)$ ist der Nullpunkt $z_1^0 = 0$ stabil falls $\mu < h$, instabil falls $\mu > h$.
- φ verhält sich für $\mu < 1$ in der Umgebung von 0 wie eine nach oben gerichtete, für $\mu > 1$ wie eine nach unten gerichtete Parabel.
- Für genügend großes h ⁶ ist z_1^0 einziger und stabiler Fixpunkt.
- Für genügend kleines h ⁷ existieren zusammen mit z_1^0 zwei weitere Fixpunkte $-\mu < z_2^0 < 0 < z_3^0 < 1$ mit unterschiedlichen Vorzeichen. Dabei ist z_1^0 instabil und z_2^0, z_3^0 stabil.
- Im Zwischenbereich ⁸ befinden sich die beiden Fixpunkte $z_2^0 < z_3^0$:
 - Im Bereich $(0, 1)$ falls $\mu < 1$, wobei z_1^0, z_3^0 stabil und z_2^0 instabil sind.
 - Im Bereich $(-\mu, 0)$ falls $\mu > 1$, wobei z_1^0, z_2^0 stabil und z_3^0 instabil sind.
- Für $h \rightarrow 0^+$ geht $z_3^0 \rightarrow 1$ und $z_2^0 \rightarrow -\mu$.
- Für $h \rightarrow \mu$ geht $z_2^0 \rightarrow 1 - \mu$ und $z_3^0 \rightarrow 0$.

³Explizit: Genau dann wenn $1 \leq \mu = h$.

⁴Genau dann wenn $h < \mu$.

⁵Explizit: Genau dann wenn $\mu < 1$ und $h = (1 + \mu)^2/4$.

⁶Genauer: $h > (1 + \mu)^2/4$.

⁷Genauer: $h < \mu$.

⁸Sprich: $\mu < h < (1 + \mu)^2/4$.

Abbildungen (0.6) & (0.7) zeigen den Verlauf von $\varphi(z)$ für verschiedene h & μ Werte.

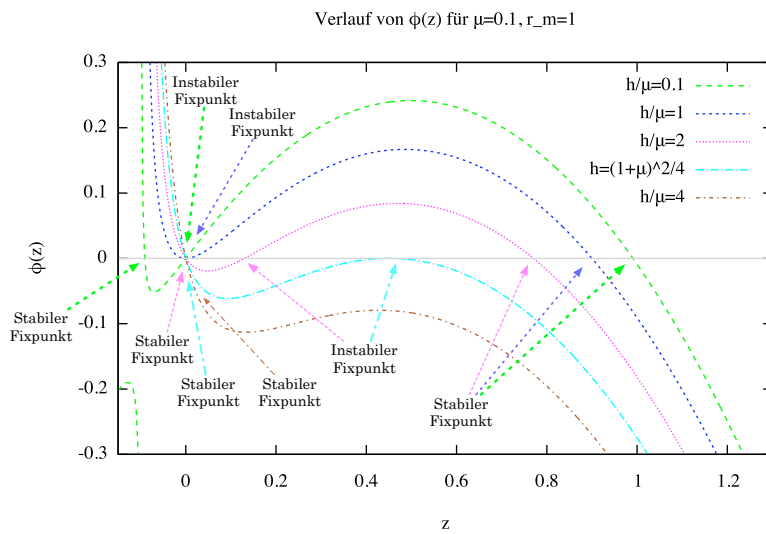


Abbildung 0.6: Verlauf von $\varphi(z)$ für $\mu = 1/10$, $r_m = 1$ und verschiedene h -Werte.

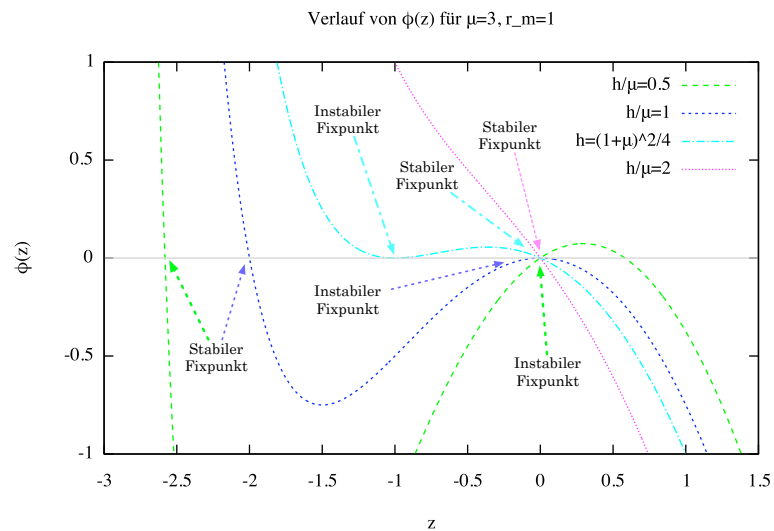


Abbildung 0.7: Verlauf von $\varphi(z)$ für $\mu = 3$, $r_m = 1$ und verschiedene h -Werte.

Abbildung (0.8) stellt obige Zusammenhänge für die Fälle $\mu < 1$ und $\mu > 1$ dar.

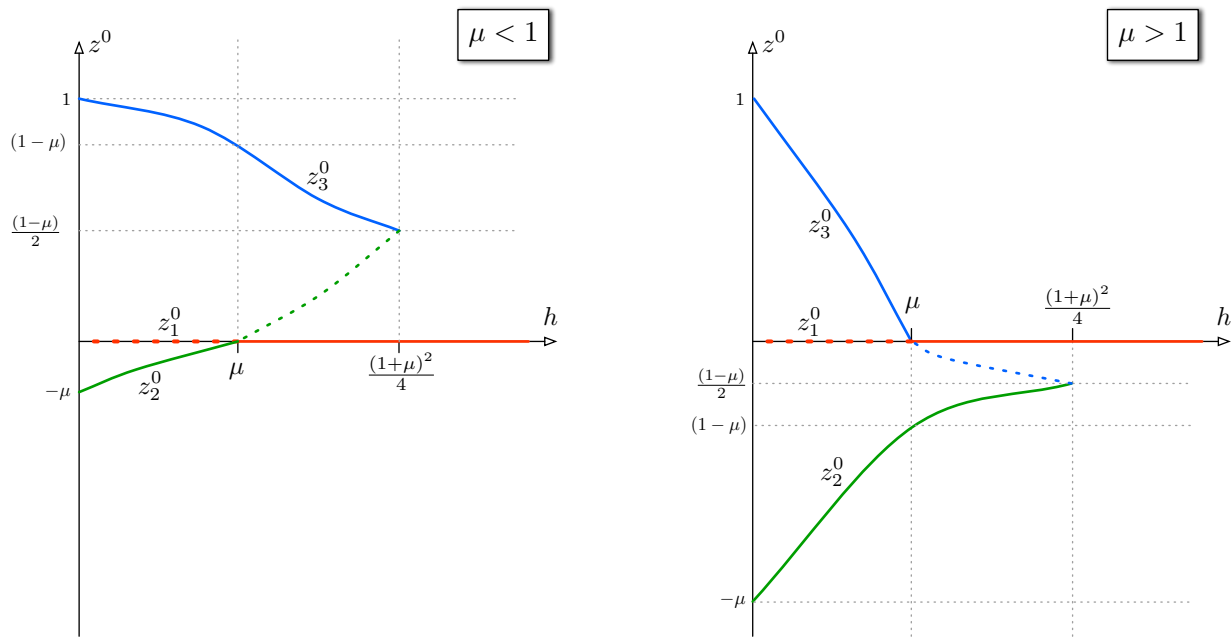


Abbildung 0.8: Qualitative Lage & Stabilität der Fixpunkte in Abhängigkeit von h für $\mu < 1$ und $\mu > 1$. Zu erkennen ist die Sattelknoten (Tangenten)-Bifurkation bei $h = (1 + \mu)^2/4$ und die transkritische Bifurkation bei $h = \mu$.

(b) Betrachten nur das Definitionsgebiet $x \in [0, \infty)$. Dann ist einziger, nicht-triviler Fixpunkt $z_3^0 \geq 0$ (falls existent). Der stationäre Ertrag

$$E^0(H) = Kr_m \cdot \frac{hz_3^0}{z_3^0 + \mu} =: \mathcal{E}^0(h)$$

geht:

- Für $h \rightarrow 0$ gegen 0.
- Für $h \rightarrow \mu$ gegen
 - $Kr_m \cdot \mu(1 - \mu)$ falls $\mu < 1$
 - 0 falls $\mu > 1$
- Für $h \rightarrow [(1 + \mu)^2/4]^+$ gegen $Kr_m \cdot (1 - \mu^2)/4$ falls $\mu < 1$.

In allen anderen Bereichen wo $z_3^0 = 0$ ⁹, ist $\mathcal{E}^0(h) = 0$.

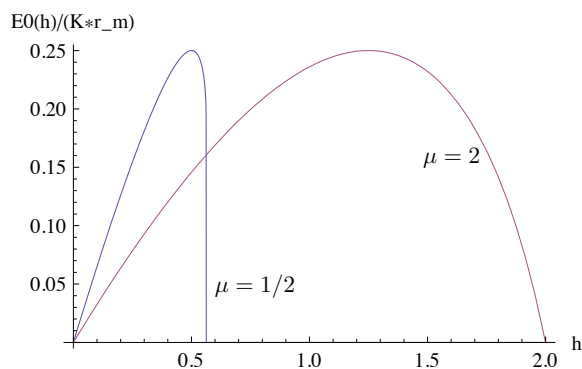


Abbildung 0.9: Stationärer Ertrag $\mathcal{E}^0(h)$ im Holling-Modell-II für $d = 0$.

⁹Also insbesondere für $h > \mu$ falls $\mu > 1$ bzw. $h > (1 + \mu)^2/4$ falls $\mu < 1$.

(c) Bei einer Konsum-Funktion vom Holling-Typ-III

$$b(x) = \frac{b_m x^2}{x^2 + M^2}$$

ergibt sich analog zu oben

$$\dot{z} = \varphi(z) := r_m \cdot z \cdot [\rho(z) - \beta(z)]$$

wobei diesmal

$$\rho(z) := 1 - z \quad , \quad \beta(z) := \frac{hz}{z^2 + \mu^2}$$

Abbildung (0.10) zeigt den Verlauf von ρ und β für typische μ, h Werte.

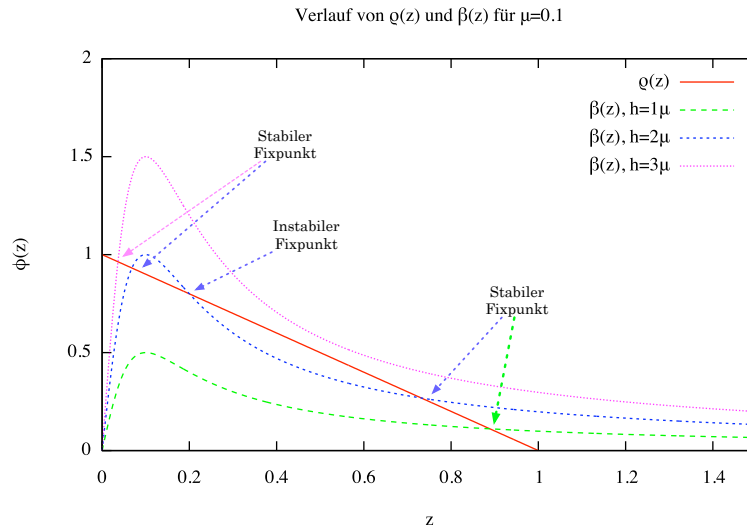


Abbildung 0.10: Vergleich von $\rho(z)$ & $\beta(z)$ im Holling-Modell-III für $\mu = 0.1$ und verschiedene h Werte.

Zu erkennen ist, dass $z_1^0 := 0$ stets instabiler Populationsfixpunkt ist. Ferner ist abzulesen, dass die Kurven $\rho(z)$ und $\beta(z)$ sich entweder:

- An einem Punkt $z_2^0 > 0$ kreuzen. Wegen

$$\varphi|_{(0, z_2^0)} > 0, \quad \varphi|_{(z_2^0, \infty)} < 0$$

ist dann z_2^0 ein stabiler Fixpunkt der Population.

- An 3 Punkten $z_2^0 < z_3^0 < z_4^0$ kreuzen. Wegen

$$\varphi|_{(0, z_2^0)} > 0, \quad \varphi|_{(z_2^0, z_3^0)} < 0, \quad \varphi|_{(z_3^0, z_4^0)} > 0, \quad \varphi|_{(z_4^0, \infty)} < 0$$

sind dann z_3^0 ein instabiler, z_2^0, z_4^0 stabile Populationsfixpunkte.

- An einem Punkt z_2^0 berühren und einem Punkt z_3^0 kreuzen. Dann ist z_2^0 instabil und z_3^0 stabil.

Obige Fälle treten für wachsendes h auf. Dementsprechend ergibt sich das in Abb. (0.11) qualitativ illustrierte Bifurkationsdiagramm der Fixpunkte.

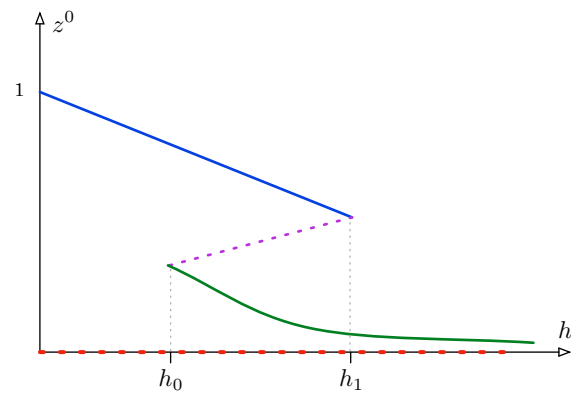


Abbildung 0.11: Qualitatives Bifurkationsdiagramm des Holling-Modells-III: Zu erkennen sind die beiden Sattelknoten (Tangenten)-Bifurkationen an den Stellen h_0 und h_1 , die zusammen eine Hysterisis bilden.