Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

Aufgabe 8: Die gemeinsame Dynamik von Vegetation („Weide“, x) und Pflanzenfressern („Herbivore“, y) läßt sich durch unser allgemeines Beute-Räuber-Modell beschreiben, hier ohne Interferenz, aber mit einem zusätzlichen Ernteterm $E(t)$ für die Herbivoren:

$$\dot{x} = x \cdot r(x) - y \cdot b(x) \;, \quad \dot{y} = u \cdot y \cdot b(x) - d \cdot y - E(t) \;, \quad r(x) = r_m \cdot x \cdot (1 - \frac{x}{K}) \quad .$$

Wenn durch geeignete Wegnahme oder Zufuhr von Tieren (mit der absoluten Ernterate $E(t) := u \cdot b(x(t)) \cdot y(t) - d \cdot y(t)$) die Zahl der Herbivoren konstant gehalten wird, d.h. $y(t) \equiv \text{const} = H$ gilt, so genügt die Menge der Vegetation $x(t)$ der <u>ein</u>dimensionalen Dynamik

$$\boxed{\dot{x} = r_m \cdot x \cdot (1 - \frac{x}{K}) - H \cdot b_m \cdot \frac{x}{x+M}} \qquad r_m, K, H, b_m, M > 0 \;.$$

Untersuchen Sie dieses Modell eines Weide-Herbivoren-Systems mit einer konstant gehaltenen Zahl H von Herbivoren, wenn deren funktionelle Reaktion (d.h. die Konsum-Funktion) durch einen monoton wachsenden und konkaven Verlauf mit Sättigung (sog. HOLLING-Typ II) gegeben ist,

$$b(x) = b_m \cdot \frac{x}{x+M} \qquad .$$

a) Ermitteln Sie <u>qualitativ</u> die Anzahl und Lage der möglichen Fixpunkte x^o und durch Linearisierung deren Stabilität ! <u>Skizzieren</u> Sie Lage und Stabilität der Fixpunkte $x^o(H)$ als Funktion des Parameters H ! Mathematisch: Welche Bifurkationstypen sind zu erkennen (insbesondere, wenn Sie auch negative x-Werte zulassen?

b) Skizzieren Sie auch den stationären Ertrag (im Grenzfall vernachlässigbar kleiner Sterberaten d der Herbivoren)

$$E^o(H) = u \cdot H \cdot b\left(x^o(H)\right)$$

als Funktion von H ! Biologisch: Welche dauerhafte Ernte ist in Abhängigkeit von H möglich, welches Systemverhalten gibt es für wachsende H-Werte, wie hängt die „Verwundbarkeit“ des Weide-Systems (d.h. die Reaktion auf kleine zufällige Schwankungen der Populationsdichte um das jeweilige Gleichgewicht) von H ab ?

*c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit einer sigmoiden funktionellen Reaktion (vom sogenannten HOLLING-Typ III)

$$b(x) = b_m \cdot \frac{x^2}{x^2 + M^2} \;,$$

Wie hängen jetzt (qualitativ !) Anzahl und Lage der Fixpunkte vom Parameter H ab, welche Bifurkationstypen treten auf ?

Anmerkung: Natürlich kann man die Aufgabe mit Mathematica analytisch „lösen“ (Teile a und b sogar relativ einfach explizit !), aber ausreichend ist eine qualitativ-grafische Analyse, wieviele Nullstellen die Gleichung $x \cdot r(x) = H \cdot b(x)$ in Abhängigkeit von H haben kann und wie demzufolge die Fixpunkte (und deren Stabilität) vom Parameter H abhängen.

Abgabe: Donnerstag, 7. 1. 10 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (12. 1. 2010)