

Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

Aufgabe 7: Sei $C(t)$ die Konzentration eines Nährstoffs, der aus einem großen Reservoir mit der konstanten Konzentration C_a durch Diffusion mit dem Austauschparameter D über eine semipermeable Wand einer Kultur von Mikroorganismen mit der Dichte $N(t)$ bereitgestellt wird. Diese nehmen den Nährstoff nach einer sog. MICHAELIS-MENTEN-Kinetik auf (d.h. mit wachsender Nährstoffkonzentration C wächst die Aufnahmerate immer langsamer und erreicht asymptotisch einen Sättigungswert b_m) und setzen ihn proportional (mit dem Umsatzfaktor u) in Zuwachs um. Wenn wir dazu noch eine konstante Pro-Kopf-Sterberate μ ansetzen, erhalten wir für $C(t)$ und die Biomasse $N(t)$ der Bakterien die folgenden beiden Differentialgleichungen :

$$\begin{aligned} \dot{C} &= D \cdot (C_a - C) - b_m \cdot \frac{C}{C + M} \cdot N \quad , \\ \dot{N} &= u \cdot b_m \cdot \frac{C}{C + M} \cdot N - \mu \cdot N \end{aligned} \quad D, C_a, b_m, M, u, \mu > 0 \quad .$$

- Interpretieren Sie alle Terme und Parameter des Modells inhaltlich (auch: Dimension bzw. mögliche Maßeinheiten) !
- Skizzieren Sie die Hauptisoklinen und die qualitative Richtung des Vektorfeldes des obigen dynamischen Systems! Welche Fälle müssen Sie unterscheiden, welchen globalen Trajektorienverlauf erwarten Sie jeweils?
- Welche Fixpunkte hat das obige System? Untersuchen Sie deren Stabilität mit der Methode der Linearisierung! Welche topologischen Fixpunkttypen treten auf ?
- Wie hängt das Systemverhalten von den Parametern ab, welche Verhaltensweisen gibt es? Skizzieren Sie alle Fixpunkte und deren Stabilitätscharakter (stabil: ausgezogene Linie, instabil: Strichlinie) als Funktion der Sterberate μ !

Hinweise: a) Bitte nicht in Details aufwendiger algebraischer Umformungen „verzetteln“ – es ist auf jeden Fall günstiger, zunächst "abstrakt" mit den Abkürzungen $f(C) := D \cdot (C_a - C)$ bzw.

$b(C) := b_m \cdot \frac{C}{C + M}$ und den Ableitungen $f'(C^0)$ bzw. $b'(C^0)$ zu arbeiten.

b) Sie können auch versuchen, die Aufgabe in einen geeigneten Kontext der Vorlesung einzubetten - dann sollte das Ergebnis grundsätzlich klar sein.

Abgabe: Donnerstag, 17. 12. 09 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (5. 1. 2010)