Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

5. Dezember 2009

Aufgabe 06

Betrachtet sei das Modell

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \cdot \rho_1(\mathbf{x}) \\ y \cdot \rho_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = (x, y) \in [0, \infty)^2$$

$$\rho_1(\mathbf{x}) := r_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{K_1 + a \cdot y}\right) \ , \ \rho_2(\mathbf{x}) := r_2 \cdot \left(1 - \frac{y}{K_2 + b \cdot x}\right)$$

mit den Pro-Kopf-Reproduktionsraten ρ_1 und ρ_2.

(a) Zu erkennen ist:

- ρ_1 und ρ_2 sind jeweils fallend in x und y, was einer jeweils innerartlichen Konkurrenz entsprich! Selbst wenn die jeweils andere Population verschwindet, gibt es für beide einen jeweiligen Sättigungswert $x_{\text{sätt}} = K_1$ bzw. $y_{\text{sätt}} = K_2$, sprich ein stabiles Gleichgewicht (bzgl. der Ein-Populationsdynamik) über dessen hinaus die Population stets sinkt.
- Die Pro-Kopf-Reproduktionsraten ρ_1 und ρ_2 sind jeweils wachsend in y und x, was einem interartlichen Mutualismus (z.B. *Symbiose*) entsprich. Insbesondere gehen $\rho_1 \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} r_1$ und $\rho_2 \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} r_2$. Jede Population wächst desto schneller, umso größer die *Nachbarpopulation* ist.
- Die Werte r_1 bzw. r_2 stellen jeweils die maximal erreichbaren Pro-Kopf-Reproduktionsraten der beiden Populationen dar. Sie werden erreicht wenn die jeweilige Population gegen 0 geht, bzw. die jeweils andere gegen ∞.

(b) Die Hauptisoklinen $\{\dot{x} = 0\}$ und $\{\dot{y} = 0\}$ sind gegeben durch

$$\{\dot{x} = 0\} = \{x = 0\} \cup \{x = K_1 + ay\}$$

$$\{\dot{y} = 0\} = \{y = 0\} \cup \{y = K_2 + bx\}$$

Die Fixpunkte der Dynamik ergeben sich als Schnittpunkte der Hauptisoklinen:

$$\mathbf{x}_1^0 = (0, 0) \ , \ \mathbf{x}_2^0 = (K_1, 0) \ , \ \mathbf{x}_3^0 = (0, K_2) \ , \ \mathbf{x}_4^0 = \left(\frac{K_1 + aK_2}{1 - ab}, \ \frac{K_2 + bK_1}{1 - ab}\right)$$

wobei der *innere* Fixpunkt $\mathbf{x}_4^0$ nur im Fall $ab < 1$ relevant ist. Abbildung (0.1) zeigt den typischen Verlauf des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ für die Fälle $ab < 1$ und $ab \geq 1$.

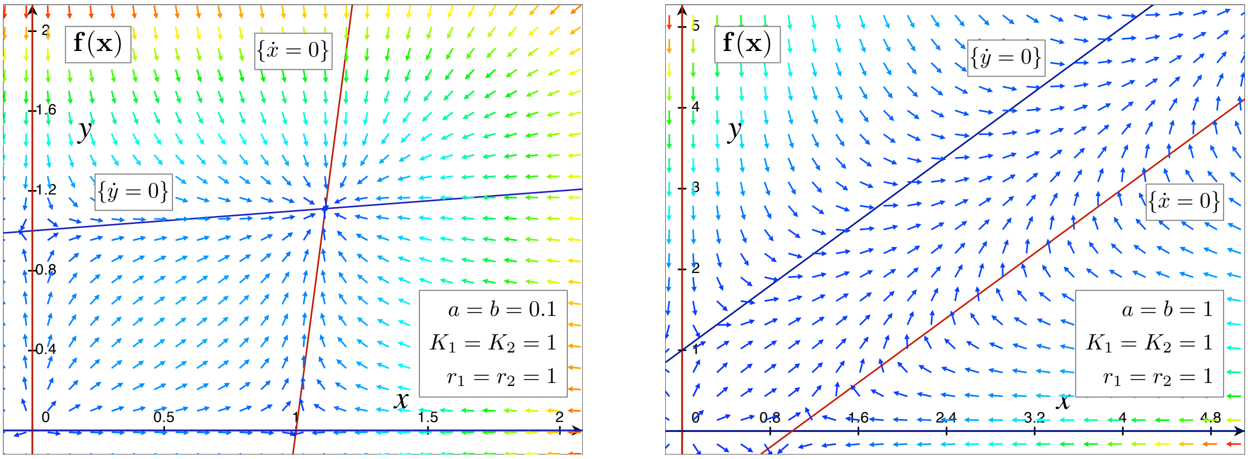

Abbildung 0.1: Verlauf des Vektorfeldes $\mathbf{f} = (\dot{x}, \dot{y})$ für $K_1 = K_2 = 1,\ r_1 = r_2 = 1$ und $a = b = 0.1$ bzw. $a = b = 1$.

Die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \left(1 - \frac{2x}{K_1 + ay}\right) & \frac{r_1 a x^2}{(K_1+ay)^2} \\ \frac{r_2 b y^2}{(K_2+bx)^2} & r_2 \cdot \left(1 - \frac{2y}{K_2+bx}\right) \end{pmatrix}$$

nimmt an den Fixpunkten jeweils die Werte

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_1^0} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_2^0} = \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 a \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_3^0} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 b & -r_2 \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_4^0} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \left(1 - \frac{2x_4^0}{K_1 + a y_4^0}\right) & \frac{r_1 a (x_4^0)^2}{(K_1 + a(y_4^0))^2} \\ \frac{r_2 b (y_4^0)^2}{(K_2 + b(x_4^0)^2} & r_2 \cdot \left(1 - \frac{2y_4^0}{K_2 + b x_4^0}\right) \end{pmatrix}$$

an. Hieraus ergibt sich:

Fixpunkt $\mathbf{x}_1^0$: $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}\ |_{\mathbf{x}_1^0}$ besitzt die (positiven) Eigenwerte $r_1, r_2 > 0$, das heißt $\mathbf{x}_1^0 = (0,0)$ ist stets ein instabiler Knoten mit Eigenrichtungen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt $\mathbf{x}_2^0$: $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}\ |_{\mathbf{x}_2^0}$ besitzt die Eigenwerte $(-r_1) < 0,\ r_2 > 0$, das heißt $\mathbf{x}_2^0 = (K_1, 0)$ ist stets ein Sattelpunkt mit Eigenrichtungen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (r_1 + r_2)/(a r_1) \end{pmatrix}$$

Fixpunkt $\mathbf{x}_3^0$: $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}\ |_{\mathbf{x}_3^0}$ besitzt die Eigenwerte $r_1 > 0,\ (-r_2) < 0$, das heißt $\mathbf{x}_3^0 = (0, K_2)$ ist stets ein Sattelpunkt mit Eigenrichtungen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2)/(b r_2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt $\mathbf{x}_4^0$: (insofern existent, sprich $ab < 1$) $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}\ |_{\mathbf{x}_4^0}$ besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

wobei

$$b = r_1 \cdot \underbrace{\left(\frac{2x_4^0}{K_1 + ay_4^0} - 1\right)}_{1} + r_2 \cdot \underbrace{\left(\frac{2y_4^0}{K_2 + bx_4^0} - 1\right)}_{1} = r_1 + r_2 > 0$$

$$c = r_1 r_2 \cdot \left[\underbrace{\left(1 - \frac{2x_4^0}{K_1 + ay_4^0}\right)}_{-1} \underbrace{\left(1 - \frac{2y_4^0}{K_2 + bx_4^0}\right)}_{-1} - \underbrace{\frac{ab(x_4^0 y_4^0)^2}{(K_1 + ay_4^0)^2 (K_2 + bx_4^0)^2}}_{ab} \right] = r_1 r_1 (1 - ab) > 0$$

Wegen $b, c > 0$ besitzen beide Eigenwerte einen negativen Realteil, sprich der Fixpunkt ist stets stabil! Wegen

$$\frac{b^2}{4} - c = \frac{(r_1 - r_2)^2}{4} + r_1 r_2 ab > 0$$

sind diese reell, das heißt bei $\mathbf{x}_4^0$ handelt es sich um einen stabilen Knoten!

Abbildung (0.2) zeigt den typischen Trajektorienverlauf an den 4 Fixpunkten.

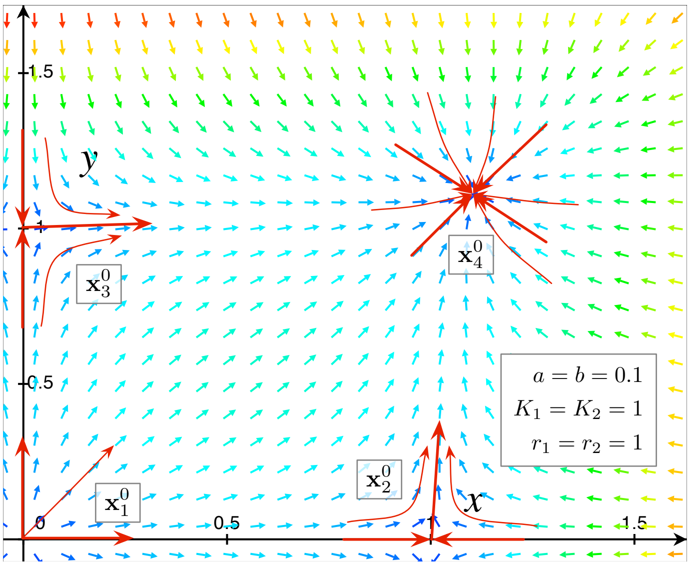

Abbildung 0.2: Typischer Trajektorienverlauf an den Fixpunkten ($K_i = 1, r_i = 1,\ a = b = 0.1$).

(c) Aus Abb. (0.1) ist zu erkennen, dass es **keine** geschlossenen (nicht-punktförmigen) Bahnen geben kann.

Im Fall dass $\mathbf{x}_4^0$ existiert ($ab < 1$), führen sämtliche Anfangswerte $\notin \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ zum Fixpunkt $\mathbf{x}_4^0$ (zu schwacher Mutualismus). Dieser Fixpunkt verschiebt sich mit wachsender Kooperation zu immer größeren Werten und geht für $ab \nearrow 1$ gegen (∞, ∞).

Existiert $\mathbf{x}_4^0$ nicht ($ab \geq 1$), so führen sämtlich Anfangswerte $\notin \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ in den Isoklinen-Zwischenbereich $\{y < K_1 + bx\} \cap \{x < K_1 + ay\}$, in dem jegliche Trajektorien ins ∞ führen (gemeinsames Wachstum durch starken Mutualismus).

Interessant ist die Tatsache, dass diese beiden Verhaltenstypen lediglich von den interartlichen Kooperationsparametern a, b und nicht etwa den Sättigungsparametern K_1, K_2 abhängen. Nicht desto-trotz hängt die exakte Lage des Gleichgewichts $\mathbf{x}_4^0$ auch von den K_1, K_2 ab.