Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

28. November 2009

Aufgabe 05

Betrachtet sei die gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wobei

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} A - (B+1) \cdot x + x^2 y \\ B \cdot x - x^2 y \end{pmatrix} \quad , \quad A, B > 0 \tag{0.1}$$

für $x, y \geq 0$.

(a) Die Hauptisoklinen $\{\dot{x} = 0\}$ bzw. $\{\dot{y} = 0\}$ ergeben sich direkt aus (0.1) gemäß

$$\{\dot{x} = 0\} = \left\{ y = \frac{(B+1)x - A}{x^2} \right\}$$

$$\{\dot{y} = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = B/x\}$$

Abbildung (0.1) zeigt einen typischen Verlauf des Vektorfeldes $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zusammen mit den entsprechenden Isoklinen.

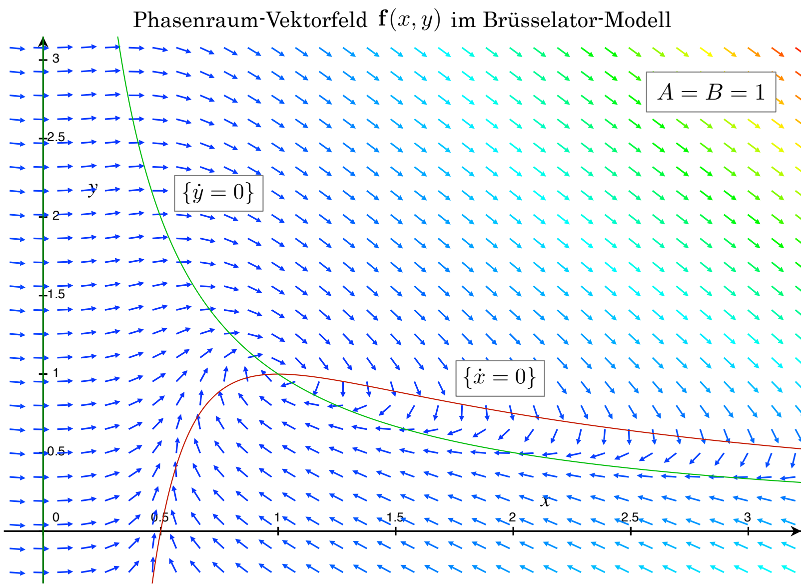

Abbildung 0.1: Typischer Verlauf des Vektorfeldes $f(x, y)$ im Brüsselator-Modell für $A = B = 1$.

Abbildung (0.2) zeigt typische Verläufe der Isoklinen für verschiedene Werte A, B.

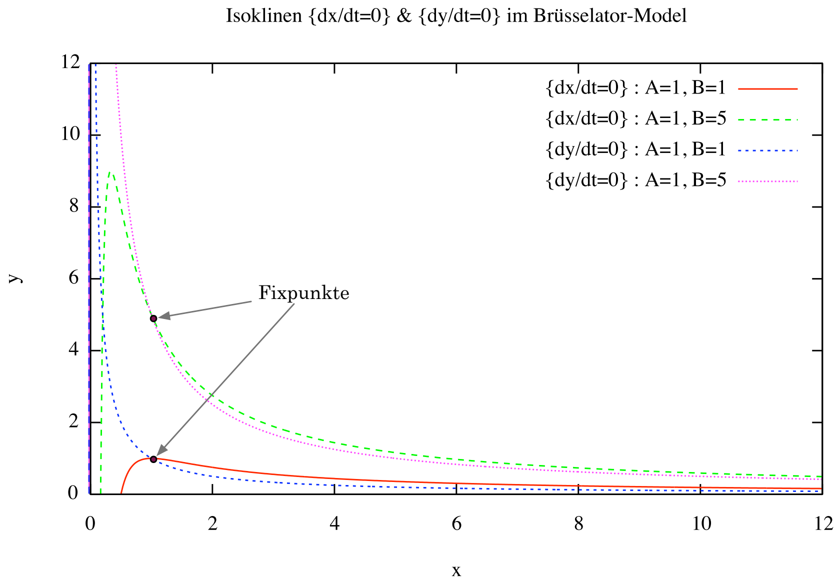

Abbildung 0.2: Typischer Verlauf der Isoklinen $\{\dot{x} = 0\}$ & $\{\dot{y} = 0\}$ im Brüsselator-Modell für verschiedene Werte A, B.

Erwartungsgemäß wird es sich bei den Trajektorien um Spiralen mit dem Isoklinen-Schnittpunkt (Fixpunkt) als Zentrum handeln.

(b) Der Fixpunkt $\mathbf{r}^0$ des Systems ergibt sich durch die Forderung $(\mathbf{r}^0) \overset{!}{=} \mathbf{0}$ (Schnittpunkt der Isoklinen) als

$$\mathbf{r}^0 = (x^0, y^0) = \left(A, \tfrac{B}{A}\right) \tag{0.2}$$

Die Jacobi-Matrix von ist am Fixpunkt gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\bigg|_{\mathbf{r}^0} = \begin{pmatrix} -(B+1) + 2xy & x^2 \\ B - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}\bigg|_{\mathbf{r}^0} = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left[-(A^2 - B + 1) \pm \sqrt{(A^2 - B + 1)^2 - 4A^2}\right] \tag{0.3}$$

Dabei kann zwischen folgenden Fällen unterschieden werden:

- $B \leq A^2 - 2A + 1$, dann ist $(A^2 - B + 1)^2 - 4A^2 \geq 0$ und beide Eigenwerte sind reell, negativ. Der Fixpunkt $\mathbf{r}^0$ ist daher ein stabiler Knoten.
- $B \geq A^2 + 2A + 1$, dann ist $(A^2 - B + 1)^2 - 4A^2 \geq 0$ und beide Eigenwerte sind reell, positiv. Der Fixpunkt $\mathbf{r}^0$ ist daher ein instabiler Knoten.
- $A^2 - 2A + 1 < B < A^2 + 2A + 1$, dann ist $(A^2 - B + 1)^2 - 4A^2 < 0$ und beide Eigenwerte

  $$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left[-(A^2 - B + 1) \pm i \cdot \sqrt{|(A^2 - B + 1)^2 - 4A^2|}\right]$$

  sind komplex, mit $\Re\{\lambda_{1/2}\} = -(A^2 - B + 1)$. Im Fall:

  - $B < A^2 + 1$ ist $\Re\left\{\lambda_{1/2}\right\} < 0$, sprich der Fixpunkt $\mathbf{r}^0$ ist ein stabiler Strudel.
  - $B > A^2 + 1$ ist $\Re\left\{\lambda_{1/2}\right\} > 0$, sprich der Fixpunkt $\mathbf{r}^0$ ist ein instabiler Strudel.

- $B = A^2 + 1$ ist $\Re\left\{\lambda_{1/2}\right\} = 0$ und $\Im\left\{\lambda_1\right\} = -\Im\left\{\lambda_2\right\} \neq 0$, sprich der Fixpunkt ist Zentrum eines Wirbels.

Abbildung (0.3) zeigt die Abhängigkeit des Realteils $\Re\left\{\lambda_{1/2}\right\}$ der Eigenwerte von den System-Parametern A, B.

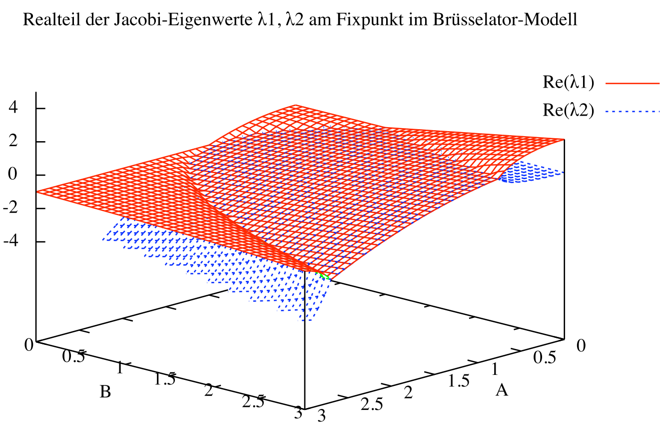

Abbildung 0.3: Realteil $\Re\left\{\lambda_{1/2}\right\}$ der Jacobi-Eigenwerte am Fixpunkt im Brüsselator-Modell.

Abbildung (0.4) illustriert die Art des Fixpunktes $\mathbf{r}^0$ in Abhängigkeit von den Werten A, B.

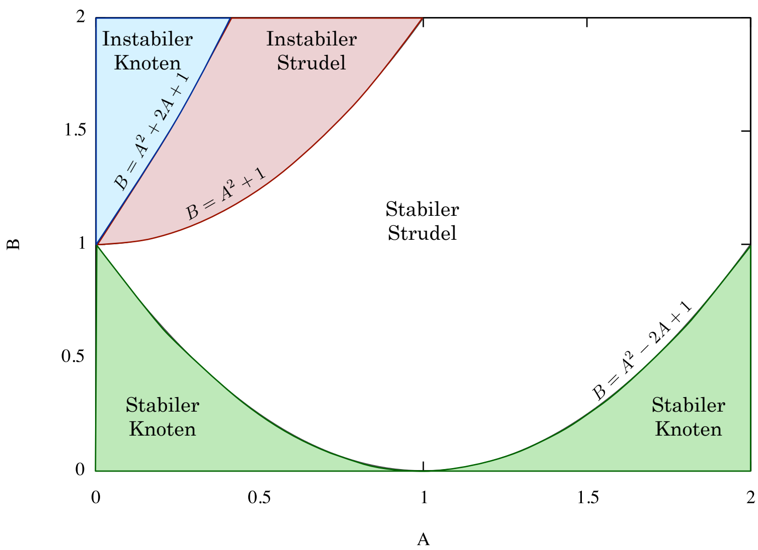

Abbildung 0.4: Fixpunkt-Typ im Brüsselator-Modell je nach A, B-Werte.

Ist A konstant vorgegeben, so kann der Fixpunkt $\mathbf{r}^0 = (A, B/A)$ je nach Wert von B alle Hauptformen annehmen (stabiler/instabiler Knoten/Strudel). Insbesondere verschiebt sich das Gleichgewicht $\mathbf{r}^0$ mit wachsendem B zu höheren Y Konzentrationen. Abbildung (0.5) illustriert das genaue Verhalten des Fixpunktes bei variierendem B.

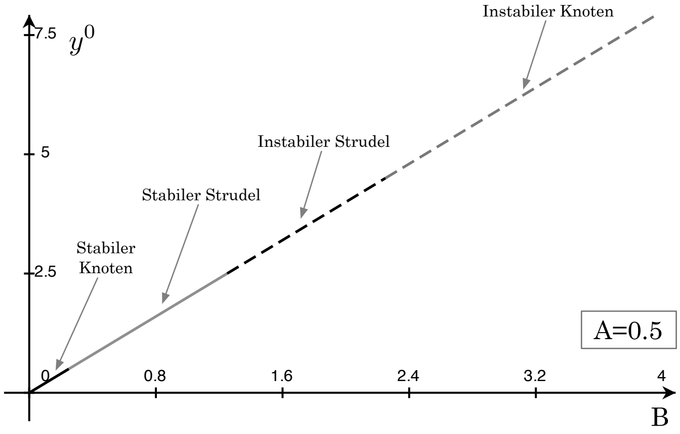

Abbildung 0.5: Verhalten des Fixpunktes in Abhängigkeit von B bei vorgegebenem $A = 0.5$.

Abbildung (0.6) illustriert den Trajektorienverlauf in Fixpunktumgebung in allen 4 Fällen.

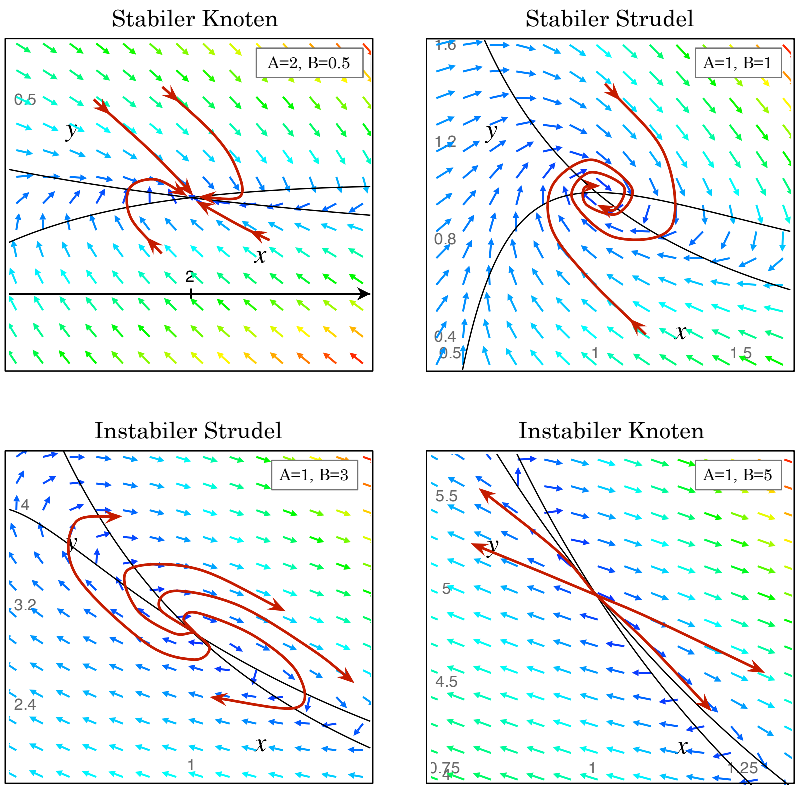

Abbildung 0.6: Trajektorienverlauf in Fixpunktumgebung für verschiedene Fixpunkttypen im Brüsselator-Modell. Pfeile repräsentieren Richtung des Vektorfeldes $\mathbf{f}$, schwarze Kurven die beiden Hauptisoklinen.

(c) Seien A, B fest vorgegeben. Zu zeigen wäre: Es existiert keine Lösung $\mathbf{r}(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ oder $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$. Offensichtlich bleibt jede Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ mit $\mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^2_+$ im positiven Quadranten, da $\dot{x}\big|_{x=0} = A > 0$ und $\dot{y}\big|_{y=0} = Bx \geq 0$.

- Angenommen für irgendeine Lösung $\mathbf{r}(t)$ geht $x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Wegen

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} y(t) = \int_0^\infty \dot{y}(\tau)\ d\tau = \int_0^\infty (Bx - x^2 y)(\tau)\ d\tau$$

müsse dann jedoch

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \int_0^\infty \dot{x}(\tau)\ d\tau = \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{(A - x(\tau))}_{\overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} -\infty}\ d\tau}_{-\infty} - \underbrace{\int_0^\infty (Bx - x^2 y)(\tau)\ d\tau}_{\geq 0} = -\infty$$

ein Widerspruch!

- Angenommen für irgendeine Lösung $\mathbf{r}(t)$ ginge $y(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Nach voriger Überlegung muss $x(t)$ und somit auch $\dot{x}(t)$ beschränkt sein. Wegen $\dot{x}(x,y) \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ falls $x \overset{t\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, muss $x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gehen. Doch dann ginge trotzdem $\dot{x} = A - \underbrace{(B+1)x}_{\to 0} + x^2 y \to (*) \geq A > 0$, also doch $x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, ein Widerspruch.