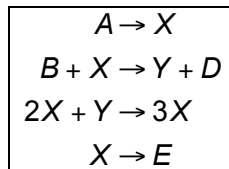


## Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

**Aufgabe 5:** Von dem belgischen Physikochemiker Ilya PRIGOGINE stammt das inzwischen klassische Modellbeispiel für Selbstorganisation in chemisch reagierenden Systemen, der sog. „Brüsselator“. Es handelt sich um eine hypothetische Reaktionsfolge mit zwei Zwischenprodukten  $X$  und  $Y$ , die als wesentlichen Bestandteil in der dritten Reaktion einen (trimolekularen) autokatalytischen Schritt enthält:



Wenn man die Konzentrationen der Ausgangsstoffe  $A$  und  $B$  konstant hält und die Endprodukte  $D$  und  $E$  rasch abführt (so daß die Rückreaktionen vernachlässigbar sind), so erhält man für die Konzentrationen  $x(t)$  bzw.  $y(t)$  der beiden Zwischenprodukte folgende Differentialgleichungen (dabei sind o.B.d.A. alle Reaktionsgeschwindigkeiten gleich Eins gesetzt):

$$\begin{array}{l} \dot{x} = A - (B+1) \cdot x + x^2 \cdot y \\ \dot{y} = B \cdot x - x^2 \cdot y \end{array}$$

$$A > 0, B > 0.$$

a) Skizzieren Sie für die obige „ebene“ (d.h. zweidimensionale) Differentialgleichung - in Abhängigkeit von den Parametern  $A$  und  $B$  - die Hauptisoklinen (das sind die Kurven im ersten Quadranten der  $(x,y)$ -Ebene, auf denen jeweils  $\dot{x} = 0$  bzw.  $\dot{y} = 0$  gilt) und die qualitative Richtung des Vektorfeldes (in den Gebieten dazwischen und auf den Isoklinen)! Welchen globalen Trajektorienverlauf erwarten Sie?

b) Welche Fixpunkte hat das obige System? Untersuchen Sie deren Stabilität (und Typ) mit der Methode der Linearisierung ! Skizzieren Sie den Trajektorienverlauf in der Nähe der Fixpunkte! Wie hängt das Systemverhalten von dem Parameter  $B$  ab, wenn  $A$  konstant vorgegeben ist ? Geben Sie in der  $(A,B)$ -Ebene alle Gebiete an, in denen jeweils ein bestimmter Fixpunkttyp (stabil/instabil, Knoten/Sattel/Strudel) vorliegt!

\*c) Zum „Knobeln“: Wie könnte man zeigen, daß der Zustandsraum  $\mathbf{R}_+^2$  (das ist der positive Quadrant) nicht verlassen werden kann, d.h. daß keine Trajektorie ins Unendliche „entweicht“?

Abgabe: Donnerstag, 3. 12. 09 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (8. 12. 09)