

Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

21. November 2009

Aufgabe 04

(a) Abbildungen (0.1), (0.2) und (0.3) zeigen jeweils den Verlauf der Pro-Kopf Reproduktionsrate R und Reproduktionsfunktion F für verschiedene Werte von b bzw. $b \gg 1$. Klar zu erkennen ist, dass für $R_m < 1$ bzw. $R_m = 1$, $b > 0$ der Reproduktionsfaktor R stets kleiner als 1 ist, sprich die Population unabhängig vom Anfangswert zur 0 kollabiert. Im Fall $R_m = 1$, $b = 0$, unterliegt die Population keiner Dynamik, sprich jeder Anfangswert x_0 bleibt erhalten.

Sei also ab nun o.B.d.A. $R_m > 1$.

Für $R_m > 1$ besitzt das System einen nicht-trivialen Fixpunkt (siehe Teil (b)), dessen Wert mit R_m wächst und je nach Wert von R_m stabil oder instabil ist.

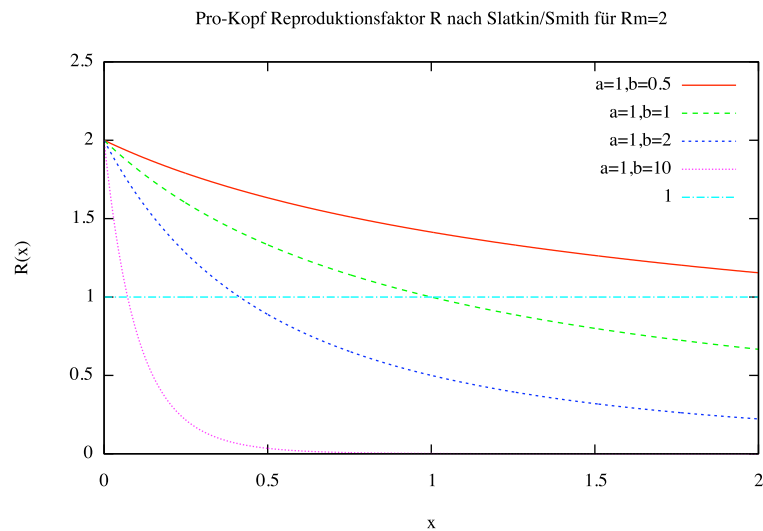


Abbildung 0.1: Pro-Kopf Reproduktionsfaktor $R(x)$ nach Slatkin/Smith für $R_m = 2$ und verschiedene Werte b .

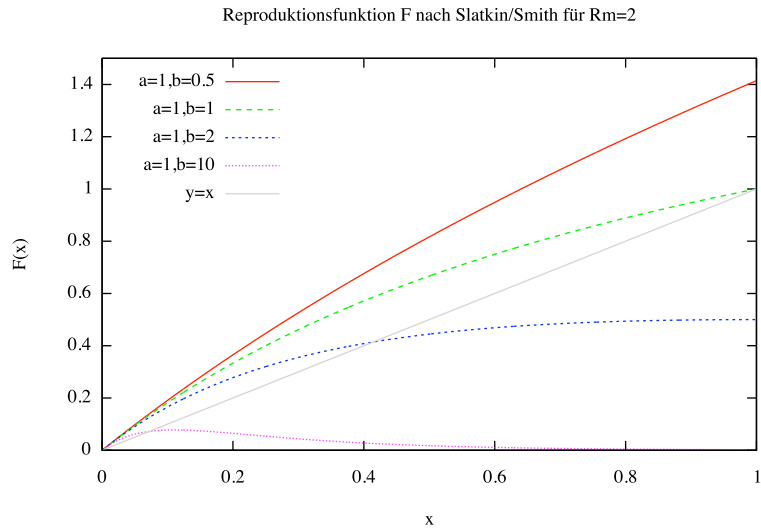


Abbildung 0.2: Reproduktionsfunktion $F(x)$ nach Slatkin/Smith für $R_m = 2$ und verschiedene Werte b .

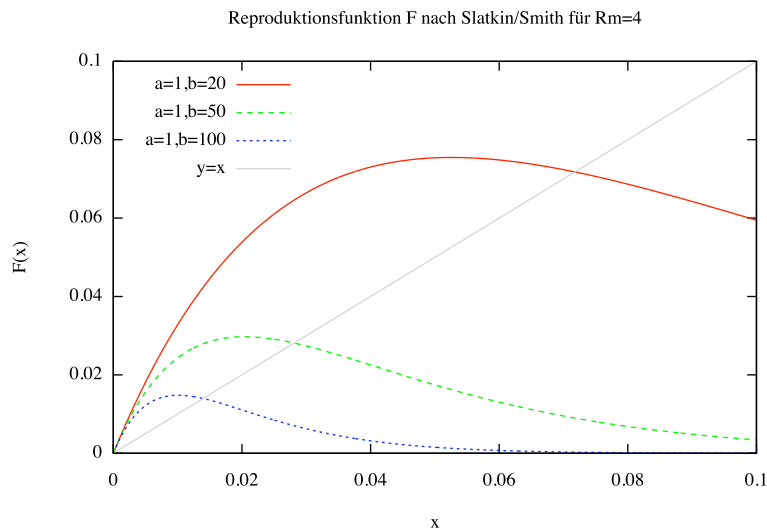


Abbildung 0.3: Reproduktionsfunktion $F(x)$ nach Slatkin/Smith für $R_m = 4$ und verschiedene Werte $b \gg 1$.

- (b) Abgesehen vom trivialen Fixpunkt $x_1^0 = 0$, sind die Populationsfixpunkte charakterisiert durch $R(x^0) = 1$, sprich

$$x_2^0 = \frac{\sqrt[b]{R_m} - 1}{a}$$

(beachte $R_m > 1$). Wegen

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{R_m}{(1+ax)^{b+1}} \cdot [1+ax(1-b)]$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x) = \frac{abR_m}{(1+ax)^{b+2}} (abx - 1)$$

also insbesondere

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_1^0} = R_m$$

ist x_1^0 instabil für $R_m > 1$ (vgl. Teil (a)). Aus

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_2^0} = \underbrace{\frac{b}{\sqrt[b]{R_m}} + (1-b)}_{\substack{<1 \\ \text{da } R_m > 1}} \quad , \quad \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_2^0} = \frac{ab}{\sqrt[b]{R_m^2}} \cdot (b\sqrt[b]{R_m} - b - 1) \quad (0.1)$$

ist zu erkennen dass:

- Im Fall $b \leq 2$ ist $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_2^0} > -1$ so dass x_2^0 stabil ist.
- Im Fall $b > 2$ und $R_m < \left(\frac{b}{b-2}\right)^b$ ist $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_2^0} > -1$ und somit x_2^0 stabil.
- Im Fall $b > 2$ und $R_m > \left(\frac{b}{b-2}\right)^b$ ist $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_2^0} < -1$ und daher x_2^0 instabil.
- Im Fall $b > 2$ und $R_m = \left(\frac{b}{b-2}\right)^b$ ist $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_2^0} = -1$ und $\left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_2^0} = a(b^2 - 4) > 0$, sprich x_2^0 ist instabil (siehe Vorbetrachtung Übungsserie 03).

Obiger Zusammenhang ist in Abbildungen (0.4) und (0.5) illustriert.

Fixpunktzweige im Slatkin/Smith Modell als Funktion von R_m

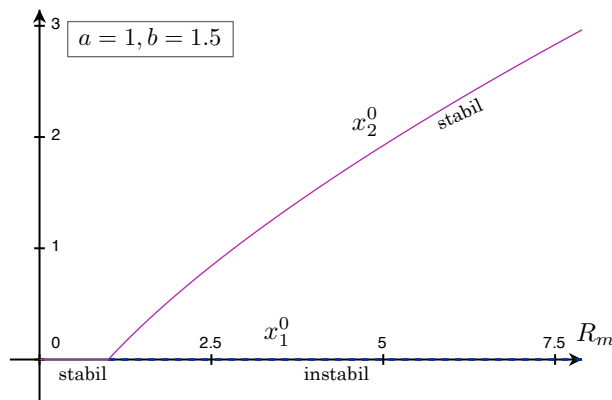


Abbildung 0.4: Fixpunktverzweigung im Slatkin/Smith Modell in Abhängigkeit vom Parameter R_m für $a = 1$, $b = 3/2$. Gestrichelte Linien stellen instabile Fixpunkte dar.

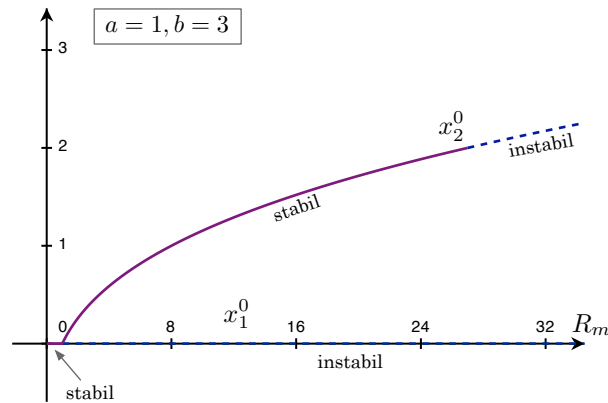


Abbildung 0.5: Fixpunktverzweigung im Slatkin/Smith Modell in Abhängigkeit vom Parameter R_m für $a = 1$, $b = 3$. Gestrichelte Linien stellen instabile Fixpunkte dar.

- (c) Aus Teil (b) wird ersichtlich, dass der (nicht-triviale) Fixpunkt x_2^0 (der sowieso nur für $R_m > 1$ existiert) für Werte $b \leq 2$ stets stabil ist, für $b > 2$ nur noch für $R_m < \left(\frac{b}{b-2}\right)^b$. Diesbezüglich kann man sich auch wie folgt überzeugen:

Da stets $\frac{dF}{dx}|_{x_2^0} < 1$ und $\frac{dF}{dx}|_{x_2^0}$ mit R_m streng monoton fällt, impliziert ein Übergang von Stabilität zur Instabilität einen Übergang zu $\frac{dF}{dx}|_{x_2^0} \leq -1$ für genügend großes R_m . Mit

$$\lim_{\substack{b:\text{const} \\ R_m \rightarrow \infty}} \frac{dF}{dx} \Big|_{x_2^0} = 1 - b$$

wird ersichtlich, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $b > 2$ (beachte echte Ungleichung aufgrund der strengen Monotonie von $F'(x_2^0; R_m)$ bzgl. R_m).

Bekanntlich ist

$$\rho(b) := \left(\frac{b}{b-2}\right)^b = \left[\left(1 - \frac{2}{b}\right)^b\right]^{-1}, \quad b > 2$$

monoton fallend in b mit

$$\rho(b) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} e^2$$

Daher verschiebt sich der Stabilitäts/Instabilitäts-Übergang (bzgl. R_m) des nicht-trivialen Fixpunktes x_2^0 für wachsendes b immer mehr nach unten und konvergiert für $b \rightarrow \infty$ schließlich zu $R_m = e^2$. Andererseits, vergrößert sich für $b \searrow 2$ der x_2^0 -Stabilitätsbereich und erfasst für $b \leq 2$ alle möglichen $R_m > 1$ (siehe Abb. (0.4)).

- (d) Ähnlich zum Ricker Modell (Aufgabe 03) ist auch hier der maximale Pro-Kopf Reproduktionsfaktor maßgebend für die Position der Fixpunkte. Genau wie im Slatkin/Smith Modell, ist auch dort $x_1^0 := 0$ stabil für $R_m < 1$ und instabil für $R_m > 1$. Eine weitere Ähnlichkeit ist die Existenz eines einzigen nicht-trivialen Fixpunktes x_2^0 für $R_m > 1$, dessen Wert in beiden Modellen mit R_m steigt.

Doch anders als beim Ricker-Modell, wo der Stabilitätsbereich von x_2^0 stets durch das Intervall $R_m \in [1, e^2]$ gegeben ist, hängt hier die entsprechende obere R_m -Grenze vom Parameter b ab. Insbesondere gibt es Werte für b , bei denen x_2^0 für alle R_m stabil ist (vgl. Teil (c)).