Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

13. November 2009

Vorbetrachtung

Betrachtet sei die Differenzengleichung

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad , \quad F \in \mathcal{C}^\infty$$

mit dem Fixpunkt $x^0 \neq 0$, das heißt $F(x^0) = x^0$. Dann gilt

$$\delta' := F(x^0+\delta) - x^0 = \cancel{F(x^0)} - \cancel{x^0} + F^{(1)}(x^0) \cdot \delta + \underbrace{\frac{F^{(n)}(x^0)}{n!}}_{\alpha_n} \cdot \delta^n + \mathcal{O}\left(\delta^{n+1}\right) = \delta\left(F'(x^0) + \alpha_n \delta^{n-1}\right) + \mathcal{O}(\delta^{n+1})$$

wobei

$$n := \min\left\{n \geq 2 : F^{(n)}(x^0) \neq 0\right\}$$

Ein stabiler Fixpunkt liegt genau dann vor, wenn für genügend kleine $|\delta|$ stets $|\delta'| < |\delta|$ gilt[1] das heißt

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad : \quad \left|F'(x^0) + \alpha_n \delta^{n-1}\right| < 1 \quad \forall\ |\delta| < \varepsilon \tag{0.1}$$

Analog, liegt ein instabiler Fixpunkt vor, wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists\ |\delta| < \varepsilon : \left|F'(x^0) + \alpha_n \delta^{n-1}\right| > 1 \tag{0.2}$$

Zu erkennen ist:

- Ist $\left|F'(x^0)\right| < 1$, so ist (0.1) offensichtlich erfüllt, sprich der Fixpunkt ist stabil.
- Ist $F'(x^0) = 1$, so muss für (0.1)

  $$\alpha_n \delta^{n-1} < 0 \qquad \forall\ 0 < |\delta| \text{ genügend klein} \tag{0.3}$$

  und für (0.2)

  $$\alpha_n \delta^{n-1} > 0 \qquad \text{für beliebig kleine} \qquad |\delta| \tag{0.4}$$

  gelten.

  - Fall: n gerade. Dann ist Gl. (0.4) erfüllt, also x^0 instabil.
  - Fall: n ungerade. Dann ist Gl. (0.3) erfüllt, also x^0 stabil, falls $\alpha_n < 0$ bzw. $F^{(n)}(x^0) < 0$ ist. Anderseits ist x^0 instabil falls $F^{(n)}(x^0) > 0$.
- Ist $F'(x^0) = -1$, so folgt ähnlich:
  - Ist n gerade, so ist x^0 instabil.
  - Ist n ungerade, so ist x^0 stabil falls $F^{(n)}(x^0) > 0$, instabil falls $F^{(n)}(x^0) < 0$.
- Ist $\left|F'(x^0)\right| > 1$, so ist (0.2) erfüllt, der Fixpunkt ist also instabil.

---

[1] Das heißt

$$F\left(B^o_{|\varepsilon|}(x^0)\right) \subseteq B^o_{|\varepsilon'|}(x^0)$$

mit $|\varepsilon'| < |\varepsilon|$, für hinreichend kleine $|\varepsilon|$.

Aufgabe 01

(a) Offensichtlich ist $x_1^0 = 0$ ein Fixpunkt der Population. Ein weiterer Fixpunkt $x_2^0 \neq 0$ liegt genau dann vor, wenn die Iterationsfunktion $F(x) := R_\mathrm{m} x e^{-cx}$ den Wert 1 annimmt, das heißt

$$x_2^0 = \frac{\ln R_\mathrm{m}}{c}$$

(nur von Interesse falls $R_\mathrm{m} > 1$). Abbildung (0.1) zeigt einen typischen Verlauf von $F(x)$.

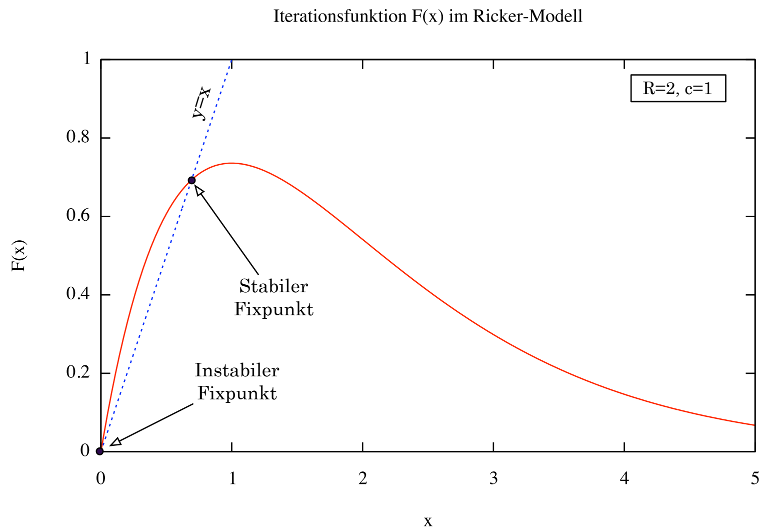

Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 3 (a): Verlauf der Iterationsfunktion im Ricker-Modell für $R = 2, c = 1$. Fixpunkte sind die Schnittpunkte von F mit der Winkelhalbierenden $\{y = x\}$.

Aus

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_1^0} = R_\mathrm{m} \quad , \quad \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_2^0} = [1 - \ln R_\mathrm{m}]$$

und

$$\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_1^0} = -2cR_\mathrm{m} \quad , \quad \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_2^0} = c\,(\ln R_\mathrm{m} - 2) \quad , \quad \left.\frac{d^3F}{dx^2}\right|_{x_2^0} = c^2\,(3 - \ln R_\mathrm{m})$$

ist abzulesen, dass

- x_1^0 stabil ist wenn $R_\mathrm{m} < 1$. Da stets $F(x) < x$ für $x \neq 0$, führt jeglicher Anfangswert x_0 zum Kollaps der Population zu 0.
- x_1^0 stabil ist wenn $R_\mathrm{m} = 1$, da $\frac{dF}{dx}\big|_{x_1^0} = 1$ & $\frac{d^2F}{dx^2}\big|_{x_1^0} < 0$. Da $F(x) < x$ für $x \neq 0$, führt auch hier jeder Anfangswert zum Kollaps der Population.
- x_1^0 instabil ist wenn $R_\mathrm{m} > 1$.
- x_2^0 stabil ist wenn $1 < R_\mathrm{m} < e^2$.
- x_2^0 instabil ist wenn $R_\mathrm{m} > e^2$.
- x_2^0 instabil ist wenn $R_\mathrm{m} = e^2$, da $\frac{dF}{dx}\big|_{x_2^0} = 1$ & $\frac{d^2F}{dx^2}\big|_{x_2^0} = 0$ & $\frac{d^3F}{dx^3}\big|_{x_2^0} > 0$ (vgl. Vorbetrachtung).
- Im Fall $R_\mathrm{m} = 1$ fallen x_1^0 und x_2^0 zusammen.

Abbildung (0.2) zeigt die Fixpunktzweige in Abhängigkeit vom Parameter R_m. Zu erkennen ist, dass ab einem bestimmten Wert $R_\mathrm{m} \geq e^2$ keiner der beiden Fixpunkte stabil ist.

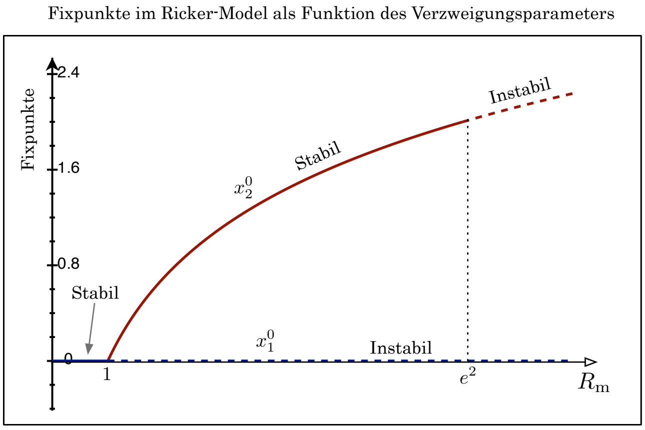

Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 3 (a): Fixpunktzweige der Population im Ricker-Modell in Abhängigkeit von R_m.

(b) Abbildungen (0.3), (0.4) & (0.6) illustrieren jeweils den (numerisch berechneten) Verlauf der Population für verschiedene Startwerte x_0 bzw. Verzweigungsparameter R_m.

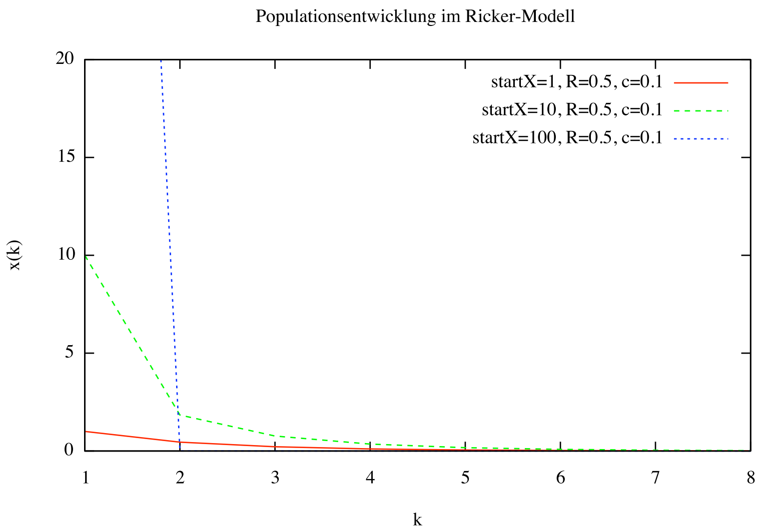

Abbildung 0.3: Zur Aufgabe 3 (b): *Zeitliche* Entwicklung von x_k für verschiedene x_0 und $R_\mathrm{m} = 0.5$. Beachte dass $x_1^0 = 0$ einziger Fixpunkt und stabil ist.

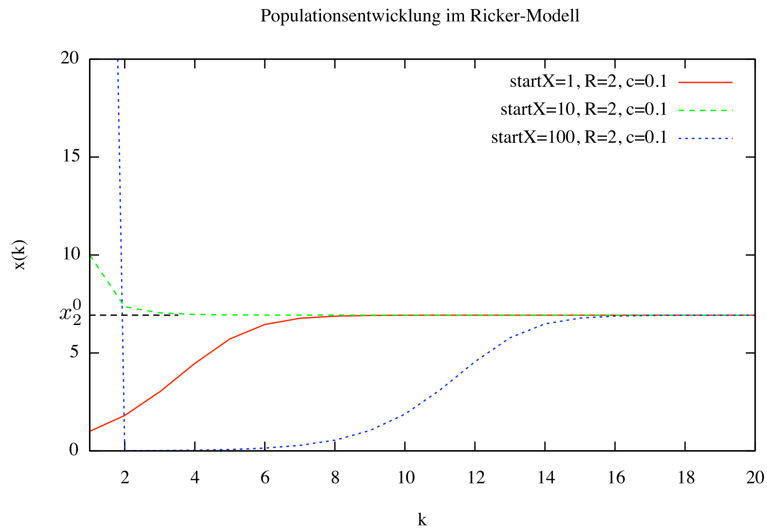

Abbildung 0.4: Zur Aufgabe 3 (b): *Zeitliche* Entwicklung von x_k für verschiedene x_0 und $R_\mathrm{m} = 2$. Beachte dass $x_1^0 = 0$ ein instabiler, $x_2^0 = \ln R_\mathrm{m}/c$ ein stabiler Fixpunkt ist.

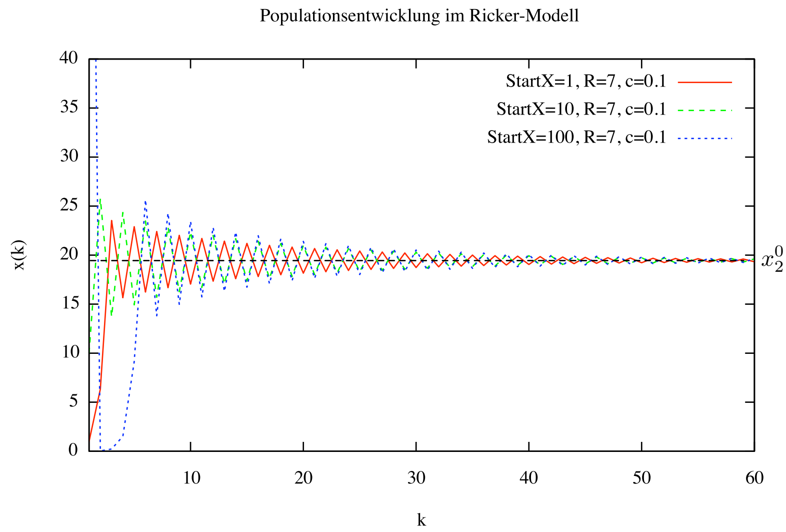

Abbildung 0.5: Zur Aufgabe 3 (b): *Zeitliche* Entwicklung von x_k für verschiedene x_0 und $R_\mathrm{m} = 7 \in (e, e^2)$. Beachte dass x_1^0 ein instabiler, x_2^0 ein stabiler Fixpunkt ist. Allerdings führt $\frac{dF}{dx}\big|_{x_2^0} < 0$ zu oszillationsartigen Konvergenzen um x_2^0.

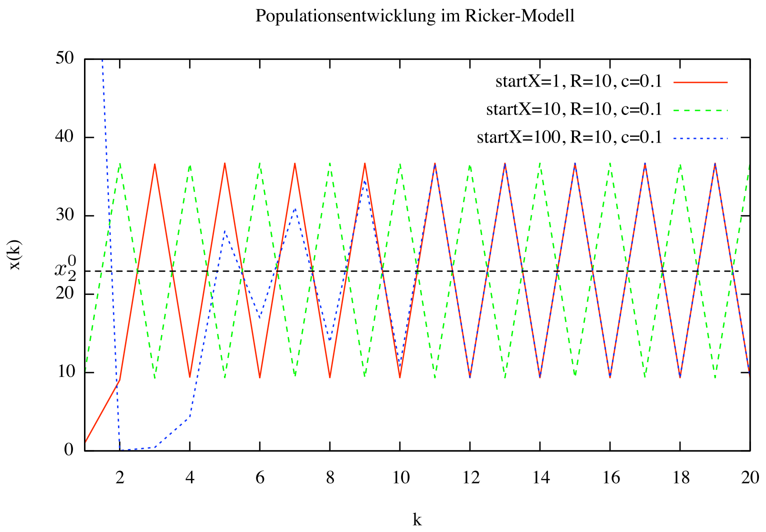

Abbildung 0.6: Zur Aufgabe 3 (b): *Zeitliche* Entwicklung von x_k für verschiedene x_0 und $R_\mathrm{m} = 10 > e^2$. Beachte dass sowohl $x_1^0 = 0$ als auch $x_2^0 = \ln R_\mathrm{m}/c$ instabile Fixpunkte sind, was zu starken Oszillationen der Population um den zweiten Fixpunkt führt.

Anmerkung

Durch Identifizierung

$$R_\mathrm{m} =: e^{r_\mathrm{m}} \quad , \quad K := \frac{r_\mathrm{m}}{c}$$

kann $F(x)$ auch in der Form

$$x_{k+1} = F(x_k) = x_k e^{r_\mathrm{m}\left(1-\frac{x_k}{K}\right)}$$

geschrieben werden. Dabei ist e^{r_m} der maximale Netto-Reproduktionsfaktor der Population und $x^0 := K$ der einzige nicht-triviale Populationsfixpunkt. Bei verschwindender innerartlicher Konkurrenz, sprich $c \to 0$ bzw. $K \to \infty$, ist

$$\Delta x_k := x_{k+1} - x_k = \left(e^{r_m} - 1\right) x_k = \left(r_\mathrm{m} + \mathcal{O}(r_\mathrm{m}^2)\right) x_k \approx r_\mathrm{m} \cdot x_k$$

das heißt r_m kann als (konkurrenzfreie) Reproduktionsrate der Population interpretiert werden.