

Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

Aufgabe 3: Bei vielen Fischarten, u.a. auch beim Lachs, werden die Eier und Larven nicht nur von Raubfischen anderer Arten, sondern auch von den erwachsenen Tieren der eigenen Art gefressen (dies ist eine spezielle Form der innerartlichen Konkurrenz).

Damit liegt es nahe, für die Zahl der erwachsenen Fische x_k im Jahre k die folgende zeitlich diskrete, dichteabhängige Dynamik zu formulieren (sog. RICKER-Modell):

$$x_{k+1} = R_m \cdot x_k \cdot e^{-c \cdot x_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad x_0 \text{ gegeben.}$$

Hier erfaßt der Parameter $R_m \equiv R_{max}$ den potentiellen (d.h. bei sehr kleinen Dichten erreichten maximalen) Netto-Reproduktionsfaktor pro Individuum (der aus der Zahl der abgelegten Eier und der natürlichen Überlebensrate unter Räubereinfluß entsteht), während der Parameter $c > 0$ eine zusätzliche und zwar dichteabhängige Mortalität durch innerartliche Konkurrenz (hier u.a. den eigenen Kannibalismus) beschreibt. (Eine viel allgemeinere Interpretation des Ansatzes besteht darin, daß durch eine begrenzte Ressourcenverfügbarkeit die Mortalität mit wachsender Dichte zu- oder die Nachkommenzahl pro Kopf abnimmt !)

a) Diskutieren Sie die zeitliche Dynamik der Population! Berechnen Sie insbesondere die Fixpunkte und deren Stabilitätscharakter in Abhängigkeit von den Parametern R_m und c ! Skizzieren Sie alle Fixpunktzweige x^0 als Funktion des (Verzweigungs-)Parameters R_m !

b) Simulieren Sie die Dynamik mit Hilfe des Computers (z.B. mit einer Programmiersprache, mit Excel, mit Mathematica oder Maple oder einem programmierbaren Taschenrechner oder ...) für interessante Parameterwerte und einen willkürlichen Anfangswert (oder mehrere)! Welches zeitliche Verhalten können Sie beobachten, wenn alle Fixpunkte instabil sind?

Anmerkung: Man kann ganz allgemein c als Stärke der innerartlichen Konkurrenz interpretieren, dann ist $x = 1/c$ jene Populationsdichte, bei der der Netto-Reproduktionsfaktor $R(x)$ auf e^{-1} , also auf rund 37% seines Maximalwertes abgesunken ist.

Häufig findet man auch die äquivalente Schreibweise:

$$x_{k+1} = x_k \cdot e^{r_m \cdot (1 - x_k/K)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Welche Bedeutung haben r_m und K , und wie hängen sie mit den obigen Parametern R_m und c zusammen?

Abgabe: Donnerstag, 19. 11. 09 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (24. 11. 09)