Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

6. November 2009

Aufgabe 01

Sei o.B.d.A. $r > 0$ und $K > 0$ angenommen.

Konstante absolute Ernterate

(a) Bei der Populationsrate $f := \dot{x}$ handelt es sich um eine nach unter gerichtete (konkave) Parabel, mit Symmetrieachse $x_s = K/2$. Die Fixpunkte der Population sind durch die Nullstellen von $f(x)$ gegeben. Die resultierende, in x quadratische Gleichung

$$\frac{r}{K}x^2 - rx + e = 0$$

besitzt:

- Keine Nullstellen, falls $e > rk/4$. In dem Fall ist stets $f(x,t) < 0$, sprich unabhängig vom Anfangswert $x_0 > 0$, strebt die Population von oben gegen 0 (bzw. $-\infty$).
- Genau eine Nullstelle, falls $e = rK/4$. In dem Fall besitzt die Population genau einen Fixpunkt $x^0 = K/2$, bei dem auch $\frac{df}{dx}\big|_{x^0} = 0$ ist. Der Fixpunkt ist daher *semistabil*, sprich, positive Störungen resultieren in einer Wiederkehr der Population in x^0, negative Störungen in einen Kollaps der Population gegen 0 (bzw. $-\infty$).
- Genau zwei Nullstellen
$$x^0_{1/2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4eK/r}}{2} > 0$$
falls $e < rK/4$. Dabei handelt es sich bei der kleineren x^0_1 um einen instabilen Fixpunkt ($\frac{df}{dx}\big|_{x^0_1} > 0$), bei der größeren x^0_2 um einen stabilen Fixpunkt ($\frac{df}{dx}\big|_{x^0_2} < 0$).
Bei einem Anfangswert $x_0 < x^0_1$ (unterkritische Anfangspopulation) strebt daher die Population gegen 0 (bzw. $-\infty$), bei einem Anfangswert von $x^0_1 < x_0$ gegen x^0_2 (von unten bzw. von oben).

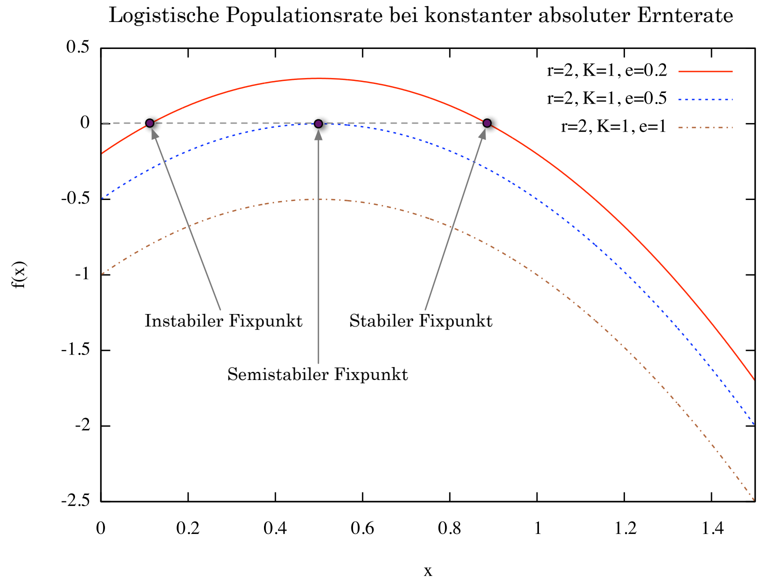

Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 2(a): Populationsraten bei verschiedenen, konstanten absoluten Ernteraten.

(b)

(c) Wie schon in Teil (a) angedeutet, entsprich die maximale, auf Dauer erhaltbare Ernterate $e_{\max}$ dem Fall, dass die Population gerade noch einen Fixwert besitzt, sprich $e_{\max} = rK/4$. Höhere Ernteraten würden stets zum Kollaps der Population führen.

(d) **Explizite, analytische Berechnung:** Zu lösen wäre das AWP

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - e \quad , \quad r, K, e > 0 \quad , \quad x(0) = x_0 \geq 0$$

Die Lösung ergibt sich durch direkte Integration

$$\underbrace{\int\limits_0^t dt}_{t} = \int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{-rx^2/K + rx - e} \stackrel{[1]}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2K}{2rx - rK} & : e = rK/4 \\[2ex] \frac{2K}{\sqrt{4reK - r^2K^2}} \arctan\left[\frac{rK - 2rx}{\sqrt{4rKe - r^2K^2}}\right] & : e > rK/4 \\[2ex] \frac{-2K}{\sqrt{r^2K^2 - 4reK}} \operatorname{arctanh}\left[\frac{rK - 2rx}{\sqrt{r^2K^2 - 4rKe}}\right] & : e < rK/4 \end{array} \right\} \Bigg|_{x_0}^{x}$$

als

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} \frac{K}{2} \cdot \frac{4x_0 + (2x_0 - K)rt}{(2x_0 - K)rt + 2K} & : e = rK/4 \\[2ex] \frac{K}{2} - \frac{\sqrt{4reK - r^2K^2}}{2r} \tan\left\{\frac{\sqrt{4reK - r^2K^2}}{2K} \cdot t + \arctan\left[\frac{rK - 2rx_0}{\sqrt{4reK - r^2K^2}}\right]\right\} & : e > rK/4 \\[2ex] \frac{K}{2} - \frac{\sqrt{r^2K^2 - 4reK}}{2r} \tanh\left\{\operatorname{arctanh}\left[\frac{rK - 2rx_0}{\sqrt{r^2K^2 - 4reK}}\right] - \frac{\sqrt{r^2K^2 - 4reK}}{2K} \cdot t\right\} & : e < rK/4 \end{cases}}$$

Konstante spezifische Ernterate

(a) Bei der Populationsrate

$$f(x) := \dot{x} = -\frac{r}{K}x^2 + (r - s)x$$

handelt es sich um eine nach unten gerichtete (konkave) Parabel, mit Symmetrieachse $x_s = K(r - s)/2r$. Die Populationsfixpunkte sind gegeben durch die Nullstellen von $f(x)$. Diese besitzt:

- Genau eine Nullstelle $x^0 = 0$, falls $r = s$. Aus

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x^0} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -2r/K < 0$$

ist zu erkennen, dass es sich bei x^0 um einen semistabilen Fixpunkt handelt, sprich, positive Störungen resultieren in ein Wiederkehren des Systems zu x^0, negative Störungen führen das System gegen $-\infty$ (falls sinnvoll). Da $f(x) < 0$ ist für $x \neq x^0$, strebt die Population unabhängig vom Anfangswert $x_0 > 0$ stets gegen 0.

- Genau zwei Nullstellen

$$x_1^0 = 0 \quad , \quad x_2^0 = \frac{K(r-s)}{r} > 0 \tag{0.1}$$

falls $r > s$. Wegen $\frac{df}{dx}\big|_{x_1^0} = (r-s) > 0$ bzw. $\frac{df}{dx}\big|_{x_2^0} = (s-r) < 0$ handelt es sich bei x_1^0 bzw. x_2^0 um einen instabilen bzw. stabilen Fixpunkt. Jeglicher Anfangswert $x_0 > 0$ führt dazu, dass die Population (von unten bzw. von oben) gegen x_2^0 strebt.

- Genau zwei Nullstellen

$$x_1^0 = 0 \quad , \quad x_2^0 = \frac{K(r-s)}{r} < 0$$

falls $r < s$, von denen jedoch nur $x_1^0 = 0$ zu betrachten sei. Wegen $\frac{df}{dx}\big|_{x_1^0} = (r-s) < 0$ handelt es sich hierbei um einen stabilen Populationsfixpunkt. Insbesondere kollabiert die Population, unabhängig vom Anfangswert $x_0 > 0$, gegen 0. Die *Prof-Kopf Ausbeute* überschreitet gewissermaßen jegliche Pro-Kopf Reproduktionsrate.

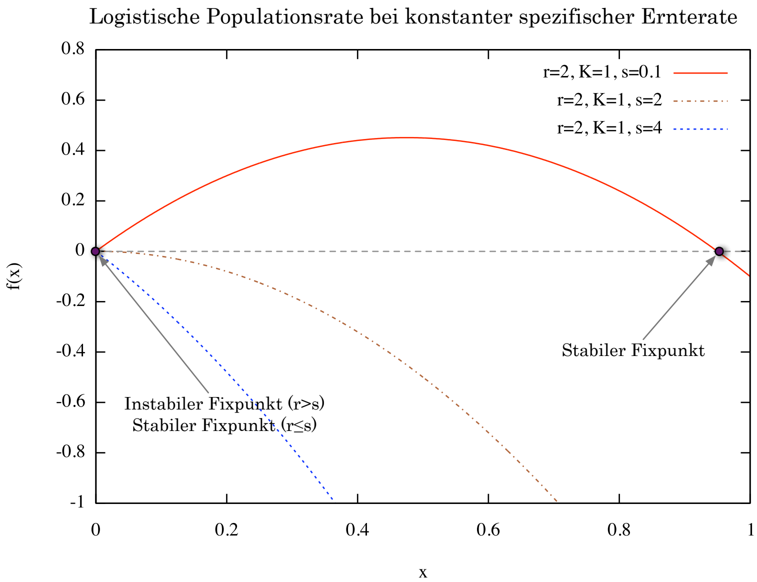

Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 2(b): Populationsraten bei verschiedenen, konstanten spezifischen Ernteraten.

(b) Nach Teil (a), ist eine stationäre Population $x^0 \neq 0$ nur im Fall $s < r$ erreichbar[1]. In dem Fall ist

$$x^0 = K(r-s)/r$$

der einzige nicht-triviale Populationsfixpunkt, und entspricht einer Ernterate von

$$E^0(s) = K(r-s)\frac{s}{r} \tag{0.2}$$

[1]Höhere spezifische Ernteraten würden die Population stets in den Kollaps führen.

Der Verlauf von $E^0(s)$ ist in Abb. (0.3) illustriert.

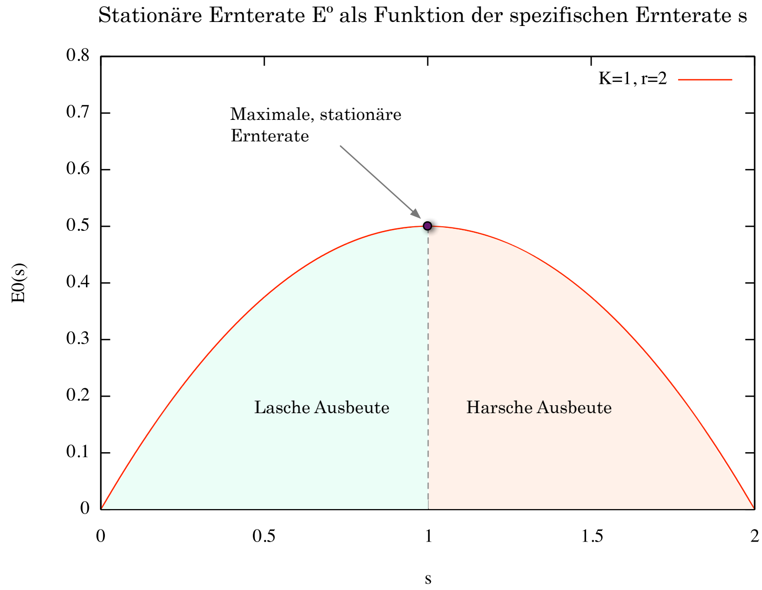

Abbildung 0.3: Stationäre Ernterate $E^0(s)$ als Funktion der spezifischen Ernterate s.

(c) Beziehung (0.2) entspricht einer nach unten gerichteten (konkaven) Parabel mit Symmetrieachse $s_\mathrm{s} = r/2$, was einer maximal möglichen stationären Ernterate von

$$E^0_{\max} = E^0(s_\mathrm{s}) = \frac{Kr}{4}$$

entspricht. Spezifische Ernteraten $s < s_\mathrm{s}$ können als *zu lasch*, spezifische Ernteraten $s > s_\mathrm{s}$ als *zu harsch* für die Population interpretiert werden. So kann die Population z.B. für $s < s_\mathrm{s}$ zwar größere Werte erreichen, liefert jedoch als *Gegenleistung* zu wenig Ernte. Anderseits wird zwar die Population für $s > s_\mathrm{s}$ *stärker Ausgebeutet*, doch bleibt die totale Ernte aufgrund des beschränkten Populationswachstums beschränkt.

(d) **Explizite, analytische Berechnung:** Zu lösen wäre das AWP

$$\dot{x} = (r-s)x - \frac{r}{K}x^2 \quad , \quad r, K, s > 0 \quad , \quad x(0) = x_0 \geq 0$$

Die Lösung ergibt sich durch direkte Integration

$$\underbrace{\int_0^t dt}_{t} = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{-rx^2/K + (r-s)x} \overset{[1]}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2K}{2rx+(s-r)K} & : r = s \\ \frac{-2}{(r-s)} \operatorname{arctanh}\left[\frac{(r-s)K-2rx}{K(r-s)}\right] & : r \neq s \end{array} \right\} \Bigg|_{x_0}^{x}$$

gemäß

$$\boxed{x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{K}{2r} \frac{4rx_0 - 2rx_0(s-r)t - (s-r)^2 Kt}{2rx_0 t + (s-r)Kt + 2K} & : r = s \\ \frac{(r-s)K}{2r} + \frac{K(s-r)}{2r} \tanh\left[\operatorname{arctanh}\left[\frac{(s-r)K + 2rx_0}{K(s-r)}\right] + \frac{(s-r)}{2} \cdot t\right] & : r \neq s \end{array} \right.}$$

Literatur

[1] *Taschenbuch Mathematischer Formeln*, H.J. Bartsch
Fachbuchverlag Leipzig, 2004