Mathematische Biologie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

12. November 2009

Aufgabe 01

(a) Die DGL ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}\left(x - \frac{z}{a}\right) = -a\left(x - \frac{z}{a}\right)$$

die bekanntlich die Lösung

$$x - \frac{z}{a} = Ce^{-at} \quad , \quad C : \text{const}$$

besitzt. Die Forderung $x(t) \overset{!}{=} x_0$ liefert dann speziell $C = x_0 - \frac{z}{a}$, also

$$\boxed{x(t) = \frac{z}{a} + \left(x_0 - \frac{z}{a}\right) e^{-at} \quad , \quad t \in \mathbb{R}} \tag{0.1}$$

Der Verlauf von $x(t)$ ist in Abbildung (0.1) illustriert.

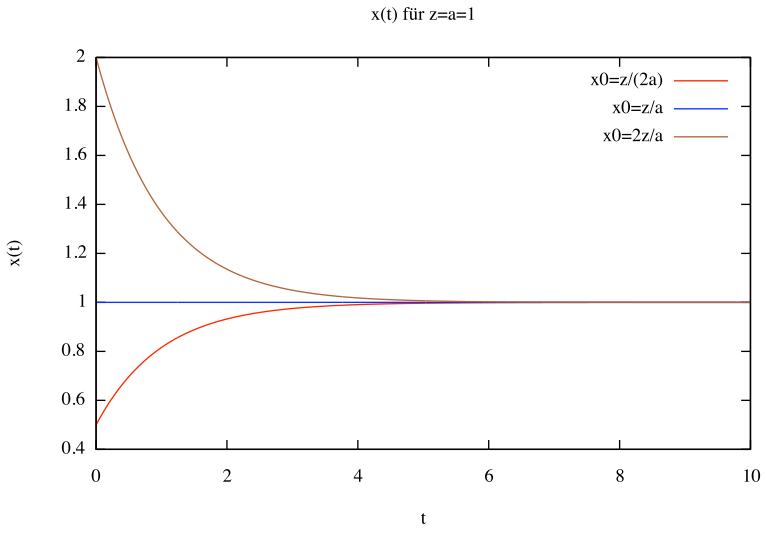

Abbildung 0.1: Verlauf von $x(t)$ für $z = a = 1$ und verschiedene x_0. Beachte den Gleichgewichtswert bei $x = z/a$.

Der Gleichgewichtswert x_g ist erreicht falls $\dot{x} = 0$, sprich für $x_g = z/a$. Ist $x_0 > x_g$, so *konvergiert* x im laufe der Zeit von oben nach x_g ($\dot{x} < 0$), im Fall $x_0 < x_g$ nähert sich x von unten an ($\dot{x} > 0$).

Besitzt nun die Zufuhrrate $z(t)$ bis zu $t = T$ den Wert u um dann anschließend auf 0 gesetzt zu werden, wird der darauf folgende Verlauf von x durch das AWP

$$\dot{x} = -ax \quad , \quad x(T) \overset{!}{=} \frac{u}{a} + \left(x_0 - \frac{z}{a}\right) e^{-aT} \quad , \quad t \geq T$$

beschrieben, das analog zu vorhin die Lösung

$$x(t) = \left[\frac{u}{a}e^{aT} + \left(x_0 - \frac{u}{a}\right)\right] e^{-at} \quad , \quad t \geq T$$

besitzt. Der entsprechende Verlauf ist in Abbildung (0.2) dargestellt.

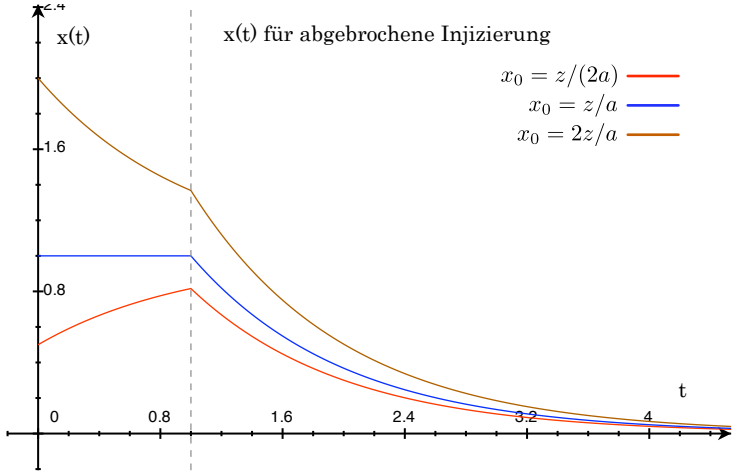

Abbildung 0.2: Verlauf von $x(t)$ bei abgebrochener Injizierung ($T = 1$) für $z = a = 1$ und verschiedene x_0.

(b) Die *Wachstumsrate* $\dot{x}(x)$ besitzt die zwei Nullstellen $x_{g1} = 0$ und $x_{g2} = b/a$. Diese stellen genau die Gleichgewichtswerte von $x(t)$ dar. Abbildung (0.3) zeigt einen typischen Verlauf von $\dot{x}(x)$.

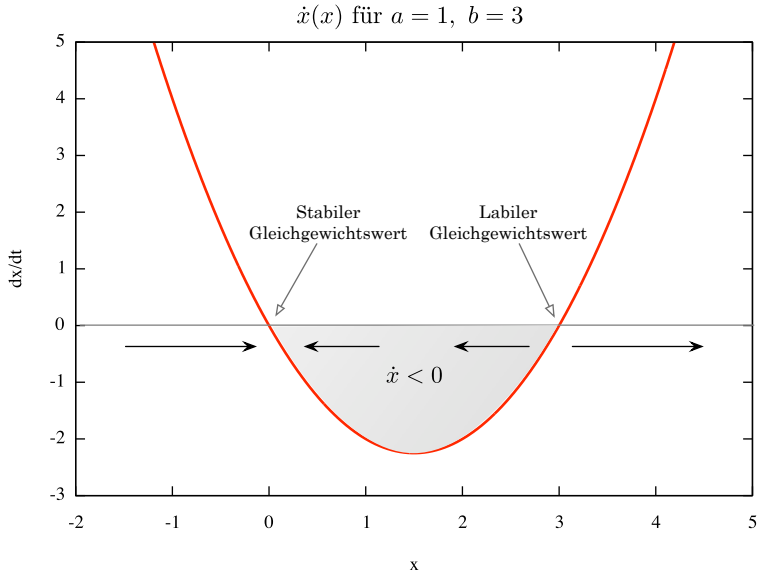

Abbildung 0.3: Verlauf von $\dot{x}$ für $a = 1,\ b = 3$.

Zwischen den beiden Gleichgewichtswerten ist stets $\dot{x} < 0$, außerhalb von $[x_{g1}, x_{g2}]$ stets $\dot{x} > 0$. Daher ist ersichtlich, dass die Population weiter fällt falls $x_0 < b/a$ um schließlich 0 zu erreichen (gegebenfalls asymptotisch), und weiter anwächst falls $x_0 > b/a$. Daher ist der Gleichgewichtswert b/a instabil, der Gleichgewichtswert $x = 0$ jedoch stabil. Die höchste *Deklinationsrate* wird bei $b/(2a)$ erreicht.

Ist $x_0 > b/a$, so erreicht die Population nach genügend Zeit jeden beliebig großen Wert. Insbesondere geht $ax^2 - bx \sim ax^2$ für $x \to \infty$, das heißt die Population erreicht innerhalb eines endlichen Zeitintervalls $[0, t_E)$ jeden beliebig großen Wert $x \overset{t \to t_E}{\longrightarrow} \infty$ (siehe Vorlesung, Fall $\dot{x} = ax^2$).

Anmerkung: Eine explizite Integration des AWP ergibt

$$\boxed{x(t) = \frac{bx_0}{ax_0 + (b - ax_0)e^{bt}}} \tag{0.2}$$

Zu erkennen ist, dass im Falle $x_0 > b/a$ für

$$t \to t_E := \frac{1}{b} \ln \left[\frac{ax_0}{ax_0 - b} \right]$$

die Population divergiert.