

## Übungen zur Mathematischen Biologie (WS 09/10)

**Aufgabe 1:** a) Wenn ein Pharmakon mit konstanter zeitlicher Rate  $z$  injiziert wird und die spezifische Zerfallsrate  $a$  besitzt, dann ändert sich seine Konzentration mit der Gleichung

$$\dot{x} = z - a \cdot x, \quad x(0) = x_0, \quad a > 0$$

Eine entsprechende ökologische Interpretation erfaßt eine (räumlich homogene, gut durchmischte) Population, die eine feste absolute Einwanderungsrate  $z$  und eine konstante Pro-Kopf-Sterblichkeitsrate  $a$  besitzt.

Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration durch Integration und skizzieren Sie ihn grafisch! Welchen Gleichgewichtswert erreicht die Konzentration? Wie sieht die Lösung aus, wenn die Zufuhrate  $z(t)$  bis zur Zeit  $T$  den konstanten Wert  $u$  besitzt und danach auf Null gesetzt wird (wenigstens grafisch, aber besser analytisch, angeben!)?

\*b) Untersuchen Sie das Wachstum einer Population mit (hypothetisch angenommener) quadratischer absoluter Geburtenrate und linearer absoluter Sterberate, also der Differentialgleichung

$$\dot{x} = a \cdot x^2 - b \cdot x, \quad x(0) = x_0, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Versuchen Sie, das qualitative Verhalten des Systems ohne direkte Integration, also nur aus Eigenschaften der Ratenfunktion (= rechte Seite der Dgl.) zu erfassen und zu beschreiben!

Anmerkung: Den Teil a) sollte jeder lösen können, er läßt sich auch explizit integrieren (wer macht dies?), aber eine qualitative Diskussion der Lösung ergibt mehr Verständnis. Bei Teil b) soll es darum gehen, nur mittels qualitativer Argumente eine Beschreibung des Lösungsverhaltens für verschiedene Anfangswerte zu erzielen (obwohl auch hier eine explizite Integration möglich ist).

Abgabe: Donnerstag, 5. 11. 09 (in der Vorlesung)

Besprechung: in der Übung (10. 11. 09)