

Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 08 - Integralrechnung

Prof. Karl H. Lotze

Die Substitutionsmethode

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

i) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

iii) $\int \frac{5x + 2}{x^2 + 2x + 10} dx$

iv) $\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx$

v) $\int \tan^3 x dx$

nach der Substitutionsmethode.

Hinweis zu (i): Substitution $x = a \tan \xi$.

Hinweis zu (ii): Substitution $x = a \sin \xi$.

Hinweis zu (iii): Spalten Sie im Nenner des Integranden ein vollständiges Quadrat ab.

Partielle Integration

Berechnen Sie die Integrale

i) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

ii) $\int \arctan \sqrt{2x - 1} dx$

iii) $\int \cos(\ln x) dx$

iv) $\int x^2 e^{-x/2} dx$

v) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

durch partielle Integration.

Logarithmische Integration

Berechnen Sie die Integrale

i) $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} dx$

ii) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$

iii) $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx$

iv) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$

v) $\int \frac{e^{2x}}{1 - 3e^{2x}} dx$

durch logarithmische Integration.

Eigenschaften von Integralen

a) Worin besteht der Unterschied zwischen

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] \quad \text{und} \quad \int \frac{d}{dx} [f(x)] dx ?$$

b) Berechnen Sie

$$\int [f(x)g''(x) - g(x)f''(x)] dx .$$

c) Berechnen Sie

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt .$$

d) Zeigen Sie, daß

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right) dx = \int_a^b f(x) dx$$

gilt.

e) Welche Eigenschaft muß die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ haben, wenn

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0$$

ist?

Flächenberechnung

Geben Sie die Formeln für den Flächeninhalt jedes der in der Abbildung dargestellten Gebiete (I) ... (V) an und addieren Sie die Ergebnisse.

Volumen von Rotationskörpern

- a) Skizzieren Sie die durch die Parameterdarstellung

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

gegebene Zyklode, indem Sie für den Parameter t einige spezielle Werte wählen.

- b) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation eines Bogens der Zyklode um die x -Achse entsteht.
Hinweis: Es gilt die Rekursionsformel

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie diese Formel durch partielle Integration.