Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 07 - Rechnen mit kleinen Größen

Prof. Karl H. Lotze

Taylor-Reihen

a) Entwickeln Sie die Funktionen

   i) $f(x) = \ln(x+1)$

   ii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   in eine Taylor-Reihe an der Stelle $x = 0$ (MacLaurin-Reihe) und berechnen Sie aus dem Ergebnis für (i) die Summe der alternierenden harmonischen Reihe
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots .$$

b) Zeigen Sie durch Entwicklung bis zur zweiten Potenz des Verhältnisses $\frac{a}{r}$, daß für $r \gg a$
$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha} \approx r - a\cos\alpha + \frac{a^2}{2r}\sin^2\alpha$$
   gilt.

c) Zeigen Sie, daß man für $r' \ll r$ die Näherung
$$\ln|\vec{r} - \vec{r}'| \approx \ln r - \frac{r'}{r}\hat{\vec{e}}_r \hat{\vec{e}}'_r$$
   benutzen kann, worin $\hat{\vec{e}}_r$ und $\hat{\vec{e}}'_r$ die Einheitsvektoren in den Richtungen von $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ *Hinweis: Drücken Sie über den cosinus-Satz den Betrag $|\vec{r} - \vec{r}'|$ durch $r = |\vec{r}|$ und $r' = |\vec{r}'|$ aus.*

Grenzwerte

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Reihenentwicklungen für $\sin x$ und e^x die beiden wichtigen Grenzwerte

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

   ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x}$

   (Anmerkung: Die MacLaurin-Reihe für e^x stellt die Exponentialfunktion für alle x dar.

b) Berechnen Sie mit den Ergebnissen von Aufgabe 1a) die Grenzwerte

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - x - \cos x}$

   ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1-x^2} + x^2 - 2}{2\cos x - 2 + x^2}$

Schwerebeschleunigung

Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m im Schwerefeld der Erde (Radius R, Masse M) ist für $r > R$

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + U_0\,.$$

Darin ist G die NEWTONsche Gravitationskonstante.

a) Legen Sie die Konstante U_0 so fest, daß die potentielle Energie an der Erdoberfläche gleich Null ist.

b) Zeigen Sie, daß die potentielle Energie für eine Hˆhe $h \ll R$ über der Erdoberfläche in der Form $U = mgh$ geschrieben werden kann, und drücken Sie die Schwerebeschleunigung g durch die Masse und den Radius der Erde aus. Berechnen Sie auch den Wert von g.

Vollständige Differentiale

a) Berechnen Sie die vollständigen Differentiale der Funktionen

   i) $z = z(x, y) = \frac{xy}{x-y}$

   ii) $u = u(s, t) = \mathrm{e}^{s/t}$

b) Entscheiden Sie, ob die Differentiale

   i) $(x + \ln y)\,\mathrm{d}\,x + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right)\mathrm{d}\,y$

   ii) $\left(x^2 - y\right)\mathrm{d}\,x + \left(x + y^3\right)\mathrm{d}\,y$

   vollständig sind oder nicht.

c) Berechnen Sie $\Delta u(x, y)$ und $\mathrm{d}\,u(x, y)$ für $x = 1$ und $y = 2$, $\Delta x = -0{,}1$ und $\Delta y = 0{,}1$. Geben Sie die Differenz $(\Delta u - \mathrm{d}\,u)$ bis zu quadratischen Gliedern in Δx und Δy an.

Fehlerfortpflanzung

Mit Hilfe eines optischen Beugungsgitters der Gitterkonstante $g = (1{,}700 \pm 0{,}005)$ werden die Lagen der Beugungsmaxima erster Ordnung der Spektrallinien H_α, H_β und H_γ bestimmt:

i) H_α : $\alpha = 22°30' \pm 30'$

ii) H_β : $\alpha = 16°45' \pm 30'$

iii) H_γ : $\alpha = 14°50' \pm 30'$

a) Berechnen Sie die Wellenlängen $\lambda = g \sin\alpha$ dieser Spektrallinien und geben Sie jeweils den absoluten $(\Delta\lambda)$ und relativen $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$ Grˆßtfehler an.

b) Berechnen Sie mit der Wellenlänge der H_α-Linie aus

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

   ($H_\alpha : m = 3$, $H_\beta : m = 4$, $H_\gamma : m = 5$) die RYDBERG-Konstante R sowie deren relativen und absoluten Grˆßtfehler.