Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 06 - Differentialrechnung mit zwei und drei Variablen. Der Gradient

Prof. Karl H. Lotze

Funktionen mit zwei Variablen

a) Stellen Sie die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

mit Hilfe der ebenen Schnitte $x = 0$ und $y = 0$ sowie der Hˆhenlinien $z = z_0$ geometrisch als Fläche dar.

b) Bestimmen Sie die Funktion $z = f(x, y)$, die die obere Hälfte des Zylinders mit dem Radius 1 beschreibt, dessen Achse die Linie ist, wo die Ebene $y = x$ auf die Ebene $z = 0$ trifft.

Partielle Ableitungen

Berechnen Sie die ersten und alle zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen

i) $z = x^2 y^3$

ii) $z = \sin\left(x^2 y^3\right)$

iii) $z = x\,\sin(xy)$

und überzeugen Sie sich von der Übereinstimmung der gemischten zweiten partiellen Ableitungen.

Die Richtungsableitung

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$u(x, y) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y\right)$$

nach der Richtung, die parallel zur Winkelhalbierenden des ersten Quadranten verläuft.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $u(x, y, z) = xyz$ nach der Richtung, die mit allen Koordinatenachsen gleiche Winkel bildet, in einem beliebigen Punkt und im Punkt $P(1, 2, 1)$.

Die Tangentialebene

Gegeben sei die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{2a^2} = 1\,.$$

a) Berechnen Sie den Normalen-*Einheits*vektor in jedem Punkt dieser Fläche sowie speziell im Punkt $P\left(\frac{a}{2}, a, a\right)$.

b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P\left(\frac{a}{2}, a, a\right)$ in Achsenabschnittsform an.

Das Gradientenfeld

Betrachten Sie die Funktion $U(x, y) = x^3 - 3y^2x$.

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Niveaulinien $U = U_0 = \text{const}$ durch und zeichnen Sie die Niveaulinien für die Werte $U_0 = \pm 1,\ \pm 8,\ \pm 27$.

b) Berechnen Sie das Gradientenfeld $\vec{\Phi} = \operatorname{grad} U$ und geben Sie dessen Betrag und Richtung an. Weisen Sie nach, daß der Gradient $\vec{\Phi}$ in jedem Punkt senkrecht auf der durch diesen Punkt gehenden Niveaulinie $U = U_0 = \text{const}$ *Hinweis: Ein Vektor steht auf einer Kurve senkrecht, wenn er auf der Kurventangente senkrecht steht.*

c) Weisen Sie nach, daß das Gradientenfeld $\vec{\Phi}$ überall tangential zu den Feldlinien $f(x, y) = 3x^2y - y^3 = \text{const}$ verläuft. Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Feldlinien durch und tragen Sie einige Feldlinien in Ihre Skizze der Niveaulinien ein. Zeigen Sie dabei auch die Richtung des Gradientenfeldes an.

Ein wichtiger Gradient

Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $u(\vec{r} - \vec{r}') = |\vec{r} - \vec{r}'|^m$ sowohl bezüglich der Variablen $\vec{r}$ als auch bezüglich $\vec{r}'$ und drücken Sie die Ergebnisse durch $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ aus. Schreiben Sie die Ergebnisse speziell für $m = -1$ auf.