Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 05 - Differentialrechnung mit einer Variablen

Prof. Karl H. Lotze

Differentiationsregeln

Bilden Sie von folgenden Funktionen die erste Ableitung ...

i) $\varphi(u) = \mathrm{e}^{-u/a} \cos \frac{u}{a}$ und zeigen Sie, daß $\varphi(0) + a\varphi'(0) = 0$ gilt.

ii) $f(x) = \arctan \frac{x}{a} - \ln \sqrt[4]{x^4 - a^4}$ und berechnen Sie $f'(2a)$

iii) $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{1 + \sin^2 z}$ und berechnen Sie $\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

iv) $f(x) = \left(x^2 + a^2\right) \arctan \frac{x}{a} - ax$ und berechnen Sie $f'(a)$

v) $s(t) = \frac{1}{t \ln ct}$ und zeigen Sie, dass $t\dot{s} + s = -ts^2$ gilt.

vi) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} P(x)$ worin $P(x) = p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x)$ ist und $p(x)$ ein Polynom vom Grad n bedeutet.

Höhere Ableitungen

a) Bilden Sie die dritte Ableitung der Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^{x/a}$ und, ausgehend von dem Ergebnis, die n-te Ableitung durch vollständige Induktion. Geben Sie auch $f^{(n)}(0)$ an.

b) Differenzieren Sie dreimal die Identität

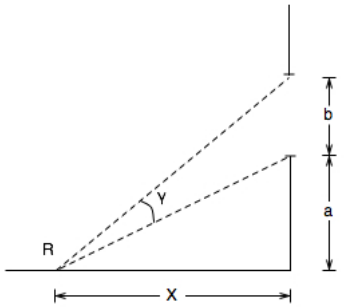
$$(x-1)\left(x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right) = x^{n+1} - x^2\,,$$

setzen Sie im Ergebnis $x = 1$ und berechnen Sie so die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,.$$

Extremwertaufgabe

a) Normalerweise bevorzugt man im Zug einen Sitzplatz direkt am Fenster. In welchem Abstand x von der Fensterwand muß ein Reisender R jedoch Platz nehmen, damit der Winkel γ, unter dem er die Fensteröffnung der Breite b sieht, maximal wird (s. Abb.)?



b) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis ein einfaches Konstruktionsverfahren ab, um die beste Sitzposition allein mit Zirkel und Lineal zu finden.

Implizites Differenzieren

Berechnen Sie durch implizites Differenzieren jeweils die erste Ableitung ...

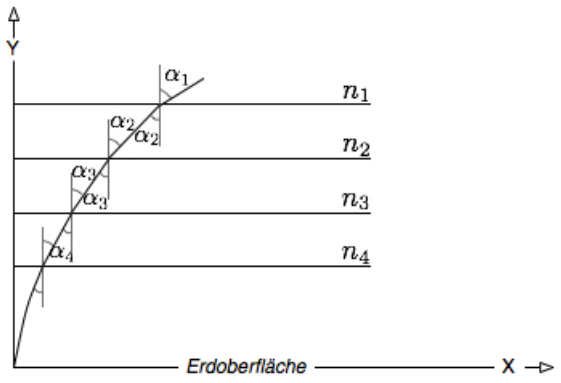
i) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ von $\mathrm{e}^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ und geben Sie $y'(0)$ an.

ii) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ von $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ und geben Sie y' für $y = \dfrac{\pi}{2}$

iii) $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$ von $t \ln x - x \ln t = 1$ und geben Sie $\dot{x}(1)$ an.

Implizites Differenzieren - eine Anwendung

Wenn Licht die Atmosphäre durchläuft, deren Brechungsindex $n = n(y)$ sich mit der Höhe ändert, ist die Lichtbahn $y = y(x)$ gekrümmt. Stellen Sie sich die Atmosphäre als aus zur Erdoberfläche parallelen Schichten bestehend vor, die jeweils konstante, aber voneinander etwas verschiedene Brechungsindizes haben. Wenn das Licht unter einem gegen die Vertikale gemessenen Winkel α_i in eine Schicht eintritt, tritt es unter einem geänderten Winkel α_{i+1} wieder aus (s. Abb.)



Es gilt das Snelluissche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = \ldots\,, \quad \text{also} \quad n(y)\sin\alpha(y) = k = \text{const}\,.$$

a) Zeigen Sie, daß man das Brechungsgesetz in der Form

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)^2 = \frac{n^2}{k^2}$$

schreiben kann und daß daraus für $y' \neq 0$

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,y} = \frac{y''}{1+y'^2}$$

folgt. (Der Strich bedeutet die Ableitung nach x.)

b) Wie muß sich der Brechungsindex n mit der Höhe y ändern, damit das Licht auf einem Kreisbogen läuft?