Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 03 - Aus der Vektoralgebra: Skalarprodukt und Vektorprodukt

Prof. Karl H. Lotze

Fertigen Sie zu den Aufgaben 1 bis 4 Skizzen an.

Komponentenzerlegung

Ein Faden der Länge ℓ, an dessen einem Ende ein Luftballon festgebunden ist, werde an der Stelle $\vec{r}_1 = -\ell\vec{i}$ am Erdboden befestigt. Mit einem zweiten Faden soll er durch eine ÷se am Ort $\vec{r}_2 = \ell\vec{i}$ zur Erde zurückgezogen werden. Die Auftriebskraft für den Luftballon sei $\vec{F}_A$, und seine momentane Höhe sei h.

a) Drücken Sie die Einheitsvektoren $\hat{\vec{e}}_1$ und $\hat{\vec{e}}_2$, in deren Richtungen die Fadenkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ am Ballon angreifen, durch das dimensionslose Verhältnis $\lambda = \frac{h}{\ell}$ aus.

b) Berechnen Sie die Beträge der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ und entscheiden Sie, welcher der beiden Fäden bei dem Versuch, den Ballon zur Erde zurückzuziehen, zuerst reißt.

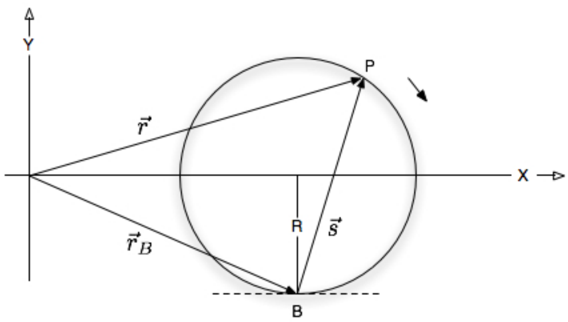
Kinematik der Kreisbewegung

a) Bestätigen Sie durch Bildung seines Betrages, daß der von dem Zeitparameter t abhängige Vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{i} + R\sin(\omega t + \varphi_0)\,\vec{j}$$

die Bewegung auf einem Kreis beschreibt und geben Sie an, ob diese im oder entgegen dem Uhrzeigersinn vonstatten geht. Berechnen Sie die Vektoren der Geschwindigkeit und Beschleunigung sowie deren Beträge und ihre Richtungen in bezug auf $\vec{r}$.

b) Ein Rad rollt in Richtung der positiven x-Achse und dreht sich dabei mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Ein beliebiger Punkt P auf dem Umfang des Rades führt dabei sowohl eine Rotations- als auch eine Translationsbewegung aus. Schreiben Sie den Vektor $\vec{r}(t)$ auf, der beide Bewegungen erfaßt und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ des Punktes P.



Der Vektor $\vec{s} = \overrightarrow{BP}$ verbindet den Punkt P zu einer bestimmten Zeit (momentan) mit dem Berührungspunkt B des Rades mit der horizontalen Unterlage (s. Abb.).

- Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{s}$ miteinander ein?
- Drücken Sie den Betrag der Geschwindigkeit $\vec{u}$ durch den Betrag des Vektors $\vec{s}$ aus.

Vergleichen Sie die Resultate mit denen von Aufgabenteil a) und charakterisieren Sie die *momentane* Bewegung des Punktes P in bezug auf den Berührungspunkt B.

Schnitt von Ebene und Kugel

Der Ortsvektor $\vec{a}$ weise zum Mittelpunkt M einer Kugel mit dem Radius R.

a) ‹berzeugen Sie sich davon, daß $|\vec{r} - \vec{a}| = R$ die Gleichung dieser Kugel ist.

b) Die Kugel wird von der Ebene $\hat{\vec{n}}\vec{r} = d$ geschnitten. In der Ebenengleichung bedeutet $\hat{\vec{n}}$ den Normalen-*Einheits*vektor der Ebene. Welche geometrische Bedeutung hat die Größe d?

c) Durch den Schnitt zwischen Ebene und Kugel entsteht ein Schnittkreis mit dem Radius ρ, dessen Mittelpunkt Z durch den Ortsvektor $\vec{b}$ beschrieben wird. Berechnen Sie den Radius ρ des Schnittkreises.
Hinweis: ‹berlegen Sie, welche Richtung der Vektor $(\vec{b} - \vec{a})$ hat.

Ebenengleichung

Eine Ebene wird durch drei auf ihr liegende Punkte A, B und C bestimmt, deren Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ seien.

a) Zeigen Sie, daß man der Ebenengleichung die Gestalt $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ geben kann. Welche Relation müssen die Koeffizienten α, β und γ erfüllen?

b) Stellen Sie den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Reziproke Vektoren

Die Vektoren

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}\,, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}\,, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}$$

heißen zu $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ reziproke Vektoren.

a) Beweisen Sie die Relationen

$$\vec{a}'\vec{b} = \vec{a}'\vec{c} = \vec{b}'\vec{a} = \vec{b}'\vec{c} = \vec{c}'\vec{a} = \vec{c}'\vec{b} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{a}\vec{a}' = \vec{b}\vec{b}' = \vec{c}\vec{c}' = 1\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß für das Spatprodukt $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$ gilt, indem Sie die Vektoren in Komponenten zerlegen. Können Sie diese Eigenschaft des Spatprodukts (bis auf ein Vorzeichen) auch ohne Rechnung begründen?

b) Die Vektoren $\dfrac{\vec{a}}{k}$, $\dfrac{\vec{b}}{\ell}$ und $\dfrac{\vec{c}}{m}$ sollen Punkte bezeichnen, die in einer Ebene liegen. Zeigen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 4b), daß der Normalenvektor dieser Ebene die Richtung des Vektors $(k\vec{a}' + \ell\vec{b}' + m\vec{c}')$ hat.