Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 02 - Komplexe Zahlen

Prof. Karl H. Lotze

Real- und Imaginärteil

Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl in Standard-Darstellung. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

i) $\mathrm{Im}\,(iz) = \mathrm{Re}$

ii) $\mathrm{Re}\,(iz) = -\mathrm{Im}$

iii) $\mathrm{Re}\,z \leq |\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$

iv) $\mathrm{Im}\,z \leq |\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$

v) $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$

Konjugiert-komplexe Zahlen

a) Berechnen Sie

$$\overline{(2+i)^2} \qquad\qquad |(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)|\,.$$

b) Es seien x und y der Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z. Schreiben Sie die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ sowie den Ausdruck $x^2 - y^2 - 2y + 2ix(1-y)$ ausschließlich in z und $\bar{z}$ auf.

Gausssche Zahlenebene (I)

Stellen Sie sowohl die Addition als auch die Subtraktion der komplexen Zahlen

$$\text{i) } z_1 = 2i \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{2}{3} - i \qquad\qquad \text{ii) } z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{und} \quad z_2 = x_1 - iy_1$$

graphisch in der Gaussschen Zahlenebene dar.

Gausssche Zahlenebene (II)

a) Skizzieren Sie in der Gaussschen Zahlenebene die Menge der durch die Bedingungen

$$\text{i) } \mathrm{Re}\,(\bar{z} - i) = 2 \qquad \text{ii) } |z-1| = |z+i| \qquad \text{ii) } |z-4| \geq |z|$$

beschriebenen Punkte.

b) Welche geometrische Figur stellt die Gleichung $|z - z_0| = R$ dar? Zeigen Sie, daß man diese Gleichung in der Gestalt

$$|z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

aufschreiben kann.

Exponentialdarstellung

Schreiben Sie in den Ausdrücken

i) $\dfrac{5i}{2+i}$ ii) $i(1-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i)$ iii) $(1+\sqrt{3}\,i)^{-10}$

Zähler und Nenner bzw. die Faktoren in Exponentialdarstellung auf, führen Sie darin die verlangten Operationen aus und kehren Sie in die Standard-Darstellung zurück.

Exponentialdarstellung und Logarithmus

Berechnen Sie

i) $\mathrm{e}^{\frac{2+\pi i}{4}}$ ii) $\ln(1-i)$ iii) $\mathrm{Re}\,[\ln(z-1)]$ iv) $(1+i)^i$.

Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy}$.

a) Beschreiben Sie das Verhalten dieser Funktion für $x \to -\infty$ und $y \to \infty$.

b) Wie lauten die Bedingungen dafür, daß $f(z)$ reell bzw. rein imaginär ist?

Quadratische Gleichung

Lösen Sie die quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z + (1-i) = 0$$

auf zweierlei Weise, nämlich

a) mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

b) indem Sie die Gleichung in Real- und Imaginärteil zerlegen und das dabei entstehende Gleichungssystem lösen.