

# Mathematik Vorkurs für Physiker

FSU Jena - WS 2008/2009

Thema 01 - Die Exponentialfunktion

Prof. Karl H. Lotze

## Radioaktiver Zerfall

Das Alter des Milchstraßensystems kann durch radioaktiven Zerfall von Uran abgeschätzt werden, welches in Supernovae produziert wird. Das Verhältnis der Anfangshäufigkeiten der Uran-Isotope  $U^{235}$  und  $U^{238}$  ist danach

$$\left. \frac{U^{235}}{U^{238}} \right|_{\text{initial}} \approx 1,65.$$

Die Zerfallsraten dieser Isotope sind

$$\lambda(U^{235}) = 0,97 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{a}} \quad \text{und} \quad \lambda(U^{238}) = 0,15 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{a}}.$$

Das heutige Häufigkeitsverhältnis beträgt

$$\left. \frac{U^{235}}{U^{238}} \right|_{\text{final}} \approx 0,0072.$$

Schätzen Sie aus dem Zerfallsgesetz  $U(t) = U(0)e^{-\lambda t}$  das Alter des Milchstraßensystems ab.

## Freier Fall mit Reibung

Beim freien Fall mit Reibung ist die Beschleunigung  $a(t)$  des Körpers durch

$$a(t) = g - \gamma v(t)$$

gegeben. Darin bedeuten  $g$  die konstante Schwerebeschleunigung,  $\gamma$  einen Reibungskoeffizienten und  $v(t)$  die Geschwindigkeit des Körpers.

- Geben Sie die Geschwindigkeit des Körpers an, die der Anfangsbedingung  $v(0) = 0$  genügt.
- Berechnen Sie aus der Geschwindigkeit die Lage  $x(t)$  des Körpers zu jeder Zeit  $t$ . Seine Anfangslage sei  $x(0) = 0$ .
- Zeigen Sie, dass zwischen Ihren Ergebnissen der Zusammenhang

$$\gamma x(t) + v(t) + \frac{g}{\gamma} \ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{g} v(t) \right] = 0$$

besteht.

## Das NEWTONSche Abkühlungsgesetz

Nach dem NEWTONSchen Abkühlungsgesetz ist die zeitliche Änderung der Temperatur  $T$  eines Körpers proportional zur Differenz dieser Temperatur und der Umgebungstemperatur  $T_U$ ,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_U),$$

worin  $k$  eine positive Konstante bedeutet.

- Geben Sie die Lösung dieser Gleichung für die Anfangsbedingung  $T(0) = T_0$  an. Welche Grenztemperatur stellt sich für große Zeiten ( $t \rightarrow \infty$ ) ein, wenn  $T_0 > T_U$  ist? Was geschieht im Falle  $T_0 < T_U$ ?
- Heißes Eisen habe eine Temperatur von 830 C bei einer Raumtemperatur von 32 C. Nach einer Minute beträgt die Temperatur des Eisens 600 C. Der Schmied muß warten, bis die Temperatur des Eisens 450 C beträgt. Wie lange dauert das, gerechnet von dem Zeitpunkt an, als das Eisen eine Temperatur von 600 C hatte?

## Elektrischer Stromkreis

Die Gleichung

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U_0$$

beschreibt die zeitliche Änderung der Ladung auf einem Kondensator. Es bedeuten  $R$  den OHMSchen Widerstand,  $C$  die Kapazität und  $U_0$  die konstante Spannung.

- Geben Sie an, wie sich die Ladung  $Q$  mit der Zeit ändert, wenn Sie zur Zeit  $t = 0$  gleich Null ist, und stellen Sie die Lösung  $Q(t)$  graphisch dar.
- Wie lange dauert es, bis die Ladung 99% ihres Sättigungswertes für  $t \rightarrow \infty$  erreicht hat?

## Die VERHULST-Gleichung

Wenn eine Population  $P$  nur  $P_0$  Mitglieder haben kann, läßt sich ihr zeitliches Wachstum durch die sogenannte logistische Gleichung oder VERHULST-Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = kP(P_0 - P)$$

beschreiben.

- Weisen Sie durch Einsetzen nach, dass

$$P(t) = AP_0 \frac{e^{P_0 kt}}{1 + A e^{P_0 kt}}$$

eine Lösung dieser Gleichung ist.

- Welchem Grenzwert strebt die Population für  $t \rightarrow \infty$  zu?