Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 07/08
Thema 10 - Lösungen

Stilianos Louca

9. Februar 2008

Aufgabe 01

a) i)

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

ii)

$$f(z) = \ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

iii)

$$f(z) = \sin(x+iy) = \frac{1}{2i}\cdot\left[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right] = -\frac{i}{2}\cdot\left[e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[e^{-y}\left(\sin x - i\cos x\right) + e^{y}(i\cos x + \sin x)\right] = \sin x\cdot\cosh y + i\cos x\cdot\sinh y$$

iv)

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

v)

$$f(z) = \frac{(x+iy)^2}{=}\frac{1}{x^2-y^2+2ixy} = \frac{x^2-y^2-2ixy}{\left(x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - i\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

vi)

$$f(z) = e^{x-iy} = e^x\cos y - ie^x \sin y$$

vii)

$$f(z) = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot e^{-i\frac{y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - ie^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

viii)

$$f(z) = \frac{1}{\cos(x+iy)} = \frac{1}{\cos x\cos hy - i\sin x\sin hy} = \frac{\cos x\cosh y}{\cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y} - i\frac{\sin x\sinh y}{\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y}$$

ix)

$$f(z) = \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

b) Verwenden den Satz über analytische Funktionen, nach dem eine Funktion $f(z) = u+iv$ analytisch ist falls

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gilt, und alle 4 partielle Ableitungen stetig sind.

i)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} \overset{\text{stetig}}{\rightarrow} \text{analytisch}$$

ii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ \rightarrow\ \text{analytisch außer in 0}$$

iii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x} \ \rightarrow\ \text{analytisch}$$

iv)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ \rightarrow\ \text{analytisch außer in 0}$$

v)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6xy^2-2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^3} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ \rightarrow\ \text{analytisch außer in 0}$$

vi)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \neq -e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \ \rightarrow\ \text{nicht analytisch!}$$

vii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] \cdot \frac{\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\neq e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - \sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] \cdot \frac{\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\rightarrow$ nicht analytisch

viii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\cos^x \sin x \cosh^3 y - \sinh^2 y \cosh y \sin x \left(\sin^2 x + 2\cos^2 x\right)}{\left(\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^x \sinh^2 y\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin^2 x \cos x \sinh y \cdot \left(\sinh^2 y - 2\cosh^2 y\right) - \cosh^2 y \sinh y \cos^3 x}{\left(\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y\right)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\rightarrow$ analytisch für nicht negative Nenner

ix)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \neq \frac{2x^3-2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \rightarrow\ \text{nicht analytisch!}$$

Aufgabe 02

Setzen

$$\vec{F} = v\vec{e}_x + u\vec{e}_y$$

und machen die Probe:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{0}\,\vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{0}\,\vec{e}_y + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{e}_z = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \square$$

Aufgabe 03

a) Beginnen mit den Definitionen von u und v und schreiben

$$u(x,y) = \ln(r^2) = 2\ln(r)\ ,\ \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{2}{r}\right) = 0$$

$$\Delta v = \partial_{xx}v + \partial_{yy}v = e^x\left[y\cos y + x\sin y + 2\sin y\right] - e^x\left[y\cos y + x\sin y + 2\sin y\right] = 0$$

b) Verwenden die Cauchy-Riemann DGL

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\wedge\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und schreiben:

i)

$$u_0(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) \;\rightarrow\; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \;\rightarrow\; v = \int \frac{2}{x}\cdot\frac{dy}{1+\frac{y^2}{x^2}} = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2+y^2} + h'(x) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2+y^2} \;\rightarrow\; h'(x) = 0 \;\rightarrow\; h(x) = C : const \;\rightarrow\; v_1(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

ii)

$$v_0(x,y) = (y\cos y + x\sin y)e^x \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = (\cos y - y\sin y + x\cos y)\,e^x \;\rightarrow\; u = (x\cos y - y\sin y)e^x + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(x\sin y + \sin y + y\cos y)e^x + h'(y) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(y\cos y + x\sin y + \sin y\right)e^x \;\rightarrow\; h'(y) = 0 \;\rightarrow\; h = C : const$$

$$\rightarrow\; u_1(x,y) = (x\cos y - y\sin y)e^x + C$$

c) Beginnen mit den gefundenen u, v hat man

$$\Delta u_1(x,y) = (x\cos y - y\sin y + 2\cos y)\,e^x - (x\cos y - y\sin y + 2\cos y)\,e^x = 0$$

$$\Delta v_1(x,y) = -\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0 \quad \square$$

Aufgabe 04

a) Parametrisieren die Kurve C durch

$$z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [0,T] \;\rightarrow\; dz = (\dot{x} + i\dot{y})\,dt$$

und schreiben so

$$\oint_C z^2\ dz = \int_0^T \left(x^2 + 2ixy - y^2\right)\cdot(\dot{x} + i\dot{y})\,dt$$

i) Parametrisieren C durch

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$z_1(t) = 1 + it : t \in [0,1]$, $z_2(t) = 1 - t + i : t \in [0,2]$, $z_3(t) = -1 + i(1-t) : t \in [0,1]$, $z_4(t) = -1 + t : t \in [0,2]$

und rechnen aus:

$$\oint_C z^2 \; dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} z^2 \; dz =$$

$$-\int_0^1 \left(1 - 2t + t^2\right) \; dt - \int_0^2 \left((1-t)^2 - 2(1-t) + 1\right) \; dt + \int_0^1 \left(1 + 2(1-t) + (1-t)^2\right) \; dt + \int_0^2 (-1+t)^2 \; dt = 0$$

ii) Parametrisieren C durch

$$C = C_1 \cup C_2 \; , \; z_1(t) = e^{it} : t \in [0, \pi] \; , \; z_2(t) = t - 1 : t \in [0,2]$$

und bekommen so

$$\oint_C z^2 \; dz = \int_0^{\pi} e^{i2t} \cdot ie^{it} dt + \int_0^2 (t-1)^2 \; dt = \frac{1}{3} \left[e^{i3t}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{3} \left[(t-1)^3\right]_0^2 = 0$$

Bemerkung: Da die zu integrierende Funktion $f(z) = z^2$ überall analytisch ist, würde der Cauchysche Integralsatz sofort das Ergebnis 0 liefern, da über eine geschlossene Kurve integriert wird.

b)

$$\int_{i\pi}^{\infty + i\pi} e^{-z} dz = \int_0^{\infty} e^{-i\pi - x} dx = e^{-i\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \; dx = \left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -1$$

Obwohl eher nicht so zweckmäßig, ist auch hier der Cauchysche Integralsatz anwendbar, indem man den Integrationsweg zu einer geschlossenen Kurve fortsetzt.

c) Parametrisieren auch hier analog zu (a) und erhalten

$$\oint_C (\overline{z} - 3) \; dz = \int_0^2 (x-3) \; dx + \int_0^{\pi/2} \left(e^{-it} - 3\right) \cdot ie^{it} \; dt = -4 + i\frac{\pi}{2} - 3i + 3 = -1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 3\right)$$

Da die zu integrierende Funktion nicht analytisch ist, kann man hier den Cauchyschen Integralsatz nicht anwenden!