Mathematische Übungen für Physiker III
FSU Jena - WS 2007/2008

8. Februar 2008

Aus der Funktionentheorie:: Integrale mit komplexen Variablen

Thema 10: Analytische Funktionen & die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

---

Aufgabe 01: Analytische Funktionen

a) Schreiben Sie mit $z = x + iy$ die nachfolgend genannten Funktionen in der Form $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ auf:

   i) $f(z) = e^z$

   ii) $f(z) \ln z$

   iii) $f(z) = \sin z$

   iv) $f(z) = \frac{1}{z}$

   v) $f(z) = \frac{1}{z^2}$

   vi) $f(z) = e^{\overline{z}}$

   vii) $f(z) = e^{1/z}$

   viii) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$

   ix) $f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$

b) In welchem Gebiet der Gaussschen Zahlenebene sind diese Funktionen analytisch?

Aufgabe 02: Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

Es sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine analytische Funktion. Welche Komponenten muss ein Vektor $\vec{F}$ haben, damit die Bedingungen $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen ergeben?

Aufgabe 03: Der "harmonische Partner"

Es seien

$$\text{i) } u(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) \quad \text{ii) } v(x,y) = (y \cos y + x \sin y)\, e^x$$

einmal der Realteil und zum anderen der Imaginärteil einer jeweiligen komplexen Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

a) Weisen Sie nach, daß die beiden angegebenen Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ harmonische Funktionen sind.

b) Konstruieren Sie zu $u(x,y)$ einen "harmonischen Partner"$v(x,y)$ und zu dem angegebenen $v(x,y)$ ein $u(x,y)$, so dass die jeweiligen Funktionen $f(z)$ analytisch sind!

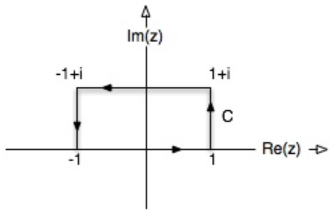
c) Weisen Sie nach, dass die gefundenen "Partner"harmonische Funktionen sind.

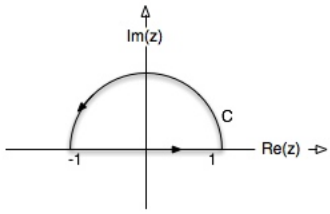
Aufgabe 04: Kurvenintegrale in der Gaussschen Zahlenebene

Berechnen Sie die nachfolgend aufgeführten Kurvenintegrale mit den jeweils angegebenen Integrationswegen C in der Gaussschen Zahlenebene und überlegen Sie *anschließend*, für welche dieser Beispiele der Cauchysche Integralsatz anwendbar gewesen wäre.

a)

$$\oint_C z^2 \; dz$$





b)

$$\int_{i\pi}^{\infty + i\pi} e^{-z} \; dz$$

Hinweis: Diese Integrationsgrenzen bezeichnen den positiven Teil der Geraden $y = \pi$.

c)

$$\oint_C (\overline{z} - 3) \; dz$$