

Mathematische Übungen für Physiker III

FSU Jena - WS 2007/2008

26. Januar 2008

Partielle Differentialgleichungen der Physik und Spezielle Funktionen

Thema 09: Kugelflächenfunktionen.

Aufgabe 01: Eine Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen

Verifizieren Sie für die Multipolindizes $l = 0, 1, 2$ mit Hilfe der expliziten Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$, dass unabhängig von ϑ und φ jeweils

$$\sum_{m=-l}^l [Y_l^m(\vartheta, \varphi)]^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

gilt.

Aufgabe 02: Die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials

Von den sechs Eckpunkten eines Oktaeders sollen sich je zwei auf den Achsen eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems befinden. Jeder dieser Punkte habe den Abstand R vom Koordinatenursprung und trage eine elektrische Ladung Q .

Entwickeln Sie das elektrostatische Potential in der Umgebung des Oktaedermittelpunktes in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen in folgenden Schritten:

- Nutzen Sie zunächst die Symmetrien der Ladungsanordnung um die nicht verschwindenden Glieder der Reihe zu bestimmen.
- Geben Sie ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten an und bestimmen Sie nach diesem die Koeffizienten bis $l = 4$.

Hinweise:

- Summieren Sie zunächst die Einzelpotentiale der jeweils zwei Ladungen, die auf einer Koordinatenachse liegen.
- Verwenden Sie das Additionstheorem

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) [Y_l^m(\vartheta', \varphi')]^* = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma)$$

mit

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$$

Darin ist γ jeweils der Winkel zwischen den Verbindungslinien vom Koordinatenursprung nach dem Ort einer Ladung einerseits und dem Punkt P , an dem das Potential berechnet werden soll, andererseits.